Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

12. Dezember 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 7. Januar 2020, 11.*^{15} *Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Sei die Signatur $\sigma := \{E, f\}$. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\forall x\, \exists y\ f(x){=}y \;\equiv\; \exists y\, \forall x\ f(x){=}y$

(ii) $\forall x\, \forall y\, \big(E(x,y) \rightarrow E(y,x)\big) \;\equiv\; \forall y\, \forall x\, \big(\neg E(y,x) \rightarrow \neg E(x,y)\big)$

(iii) $\exists x\, \exists y\ f(x){=}y \;\equiv\; \forall x\, \exists y\, \Big(\big(x{=}y \vee E(x,y)\big) \rightarrow \exists z\, \big(z{=}y \vee E(z,y)\big)\Big)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind für alle Signaturen σ und alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $(\forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

(ii) $(\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

(iii) $(\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi) \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$

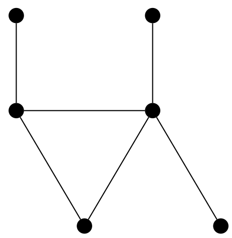
(iv) $(\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi) \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi)$

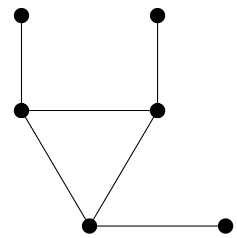
(c) Beweisen Sie, dass ihre Antworten zu **(ii)** und **(iv)** in Aufgabenteil **(b)** korrekt sind.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

In der folgenden Darstellung der Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u):

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

(a) Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im 2-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.

(c) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie, warum für Ihren Satz φ tatsächlich $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie folgende Aussage:
Für alle $m \in \mathbb{N}$, alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `al.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt9.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

Anmerkung: Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

(b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt9.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, so dass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein Aussagensymbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

(c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt9.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel φ,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu φ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

Hinweis: Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

Hinweise: Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.