Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 7. November 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 19. November 2019, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (35 Punkte)

(a) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\neg, \rightarrow\}$ und $\tau_2 := \{\vee, \wedge, \mathbf{0}\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 die Formel

$$\varphi \ := \ \big(\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge R)\big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.
Achtung: Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.46 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(a) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0,1\}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existiert eine Interpretation, die *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(b) Beweisen Sie Satz 2.46 der Vorlesung.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(a)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ von mindestens zwei essentiell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(a)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Aussage korrekt ist.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ endlich ist.

(a) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ von Knoten aus V, so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \mathit{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \dots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \mathsf{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \quad \iff \quad v \in \{v_0, v_1, v_2, \dots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage *„Der Knoten v gehört zum Pfad P“*.

Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad \iff \quad \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ hat die Länge n. Wir sagen dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes Kőnig (1936):

Kőnigs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Die Bearbeitung der Teilaufgabe (c) ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

(i) `?- [a ,b ] = [X ,Y ].`

(ii) `?- [X | []] = [c ].`

(iii) `?- [[] | [b ,c ]] = [X ,_ ,Z ].`

(iv) `?- [H | T ] = [a ,b | [c | [d]]].`

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs “Learn Prolog Now!” definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage `?- member(42, [42, ixs, X]).`!

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht.