Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. Oktober 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 5. November 2019, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Es ist ein gut behütetes Geheimnis, dass Willy und Kate heimlich einen katzenliebenden und gefräßigen Außerirdischen beherbergen. Halloween ist seine einzige Chance das Haus zu verlassen, da er sich dann einen Reißverschluss ankleben und so tun kann, als wäre er ein Kind in einer skurrilen Verkleidung, das Süßigkeiten sammelt.

Es versteht sich von selbst, dass der Außerirdische bei dieser Gelegenheit eine möglichst große Ausbeute an Süßigkeiten und Katzen machen möchte. Um sein Vorhaben im Detail zu planen, teilt er seine Stadt zunächst in 30 mal 30 Parzellen ein. Alle Parzellen stellen Grundstücke dar, wobei ein Grundstück $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$ benachbart ist zu den Grundstücken $\langle i-1, j\rangle$, $\langle i+1, j\rangle$, $\langle i, j-1\rangle$ und $\langle i, j+1\rangle$. Grundstücke am Rande der Stadt haben natürlich weniger als vier Nachbarn.

Jedes Grundstück hat genau einen Bewohner. Jeder dieser Bewohner kann ein ***A****ngsthase*, eine *nette* ***O****ma*, ein ***G****eizhals* oder ein ***K****atzenliebhaber* sein. Er kann aber auch keiner dieser Kategorien angehören oder mehreren.

Für den Außerirdischen ist die Ausbeute bei netten Omas und Katzenliebhabern deutlich größer als bei den anderen Kategorien.

Um einen Plan über die erwartete Beute in den Grundstücken zu erstellen, benutzt der Außerirdische Aussagensymbole $A_{i,j}, O_{i,j}, G_{i,j}$ und $K_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$. Hierzu beschreibt $G_{7,11}$, dass der Bewohner von Grundstück $\langle 7, 11\rangle$ ein Geizhals ist. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

Um nun einen solchen Plan erstellen zu können, führt der Außerirdische eine Telefonumfrage durch.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass der Bewohner jedes Grundstücks zu genau einer der vier Kategorien gehört.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigvee_{i,j\in\{2,\dots,29\}} \left(K_{i,j} \wedge K_{i-1,j} \wedge K_{i+1,j} \wedge K_{i,j-1} \wedge K_{i,j+1}\right).$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Bei der Telefonumfrage stellt der Außerirdische fest, dass Geizhälse aufgrund niedrigerer Grundstückspreise gerne am Stadtrand wohnen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die repräsentiert, dass alle Geizhälse am Stadtrand leben.

(d) Der Außerirdische stellt darüber hinaus fest, dass Angsthasen, die nicht am Stadtrand wohnen, oftmals Angst vor Katzen haben und außerdem eine nette Oma in der Nähe haben wollen. Stellen Sie eine Formel φ_4 auf, die repräsentiert, dass Angsthasen, die nicht am Stadtrand wohnen, immer eine nette Oma in der Nachbarschaft haben, aber keinen Katzenliebhaber.

Aufgabe 2: (30 Punkte)

(a) **Achtung:** Diese Aufgabe ist bis zum Abgabetermin durch die Beantwortung eines Quiz in Moodle **von jeder Teilnehmerin/jedem Teilnehmer einzeln** abzugeben.

Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\varphi_1 := (A_1 \wedge \mathbf{0})$

(ii) $\varphi_2 := \big((A_0 \vee A_1) \rightarrow (A_0 \wedge A_1)\big)$

(iii) $\varphi_3 := \big(\neg(A_0 \rightarrow \neg A_1) \rightarrow A_1\big)$

(iv) $\varphi_4 := \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_1)\big)$

(b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil **(a)** definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \;:=\; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$.
$\varphi_6 = (V_6 \leftrightarrow \neg V_{36})$.
Geben Sie mit Begründung eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 \;:=\; (\neg A_0 \vee \neg A_1) \qquad \varphi_3 \;:=\; \big(A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)\big)$$

$$\varphi_2 \;:=\; \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2)\big) \qquad \varphi_4 \;:=\; \big(\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0)\big)$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Seien $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ endliche Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Gilt dann in jedem Fall, dass die Bedingung

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \;\equiv\; \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

erfüllt ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 2 aus “Learn Prolog Now!”.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `burger` und `pizza`
- **(ii)** `mit(toast, Y)` und `mit(X, nutella)`
- **(iii)** `nett` und `'nett'`
- **(iv)** `Quellcode` und `'Quellcode'`
- **(v)** `toto` und `frosch(toto)`
- **(vi)** `plus(X, Y, 3)` und `plus(2, X, Y)`
- **(vii)** `or(not(X), Y)` und `or(not(p), and(X, X))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe **4(b)** von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage `?- trinkt(isabell, X).` !