Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

19. Dezember 2018

Logik in der Informatik

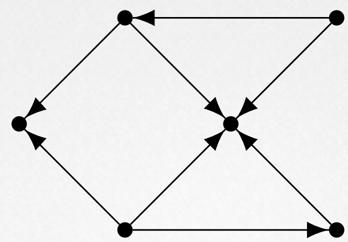
Wintersemester 2018/2019

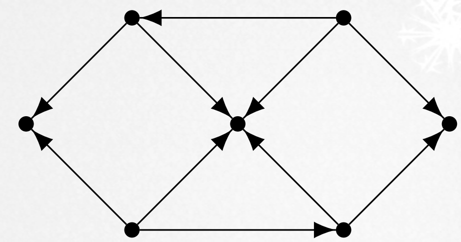
Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 8. Januar 2019, 11.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

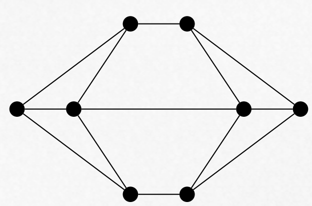
(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.

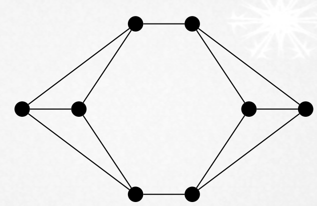
(b) Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil **(a)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe m, so dass $\mathcal{A} \models \psi$ und $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E/2\}$. In der folgenden Darstellung von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u).

Betrachten Sie die folgenden Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

Sei $\varphi := \exists x\, \exists y\, \forall z\, (E(x, z) \vee E(y, z))$. Dann gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

(a) Beschreiben Sie diejenige Gewinnstrategie für Spoiler im EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, welche nach Satz 3.52 aus dem $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ folgt. Geben Sie an, wie viele Runden Spoiler benötigt, wenn er dieser Strategie folgt.

(b) Existiert eine bessere Gewinnstrategie für Spoiler, d.h. eine Strategie, mit der er in weniger Runden das Spiel gewinnt?

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage:
Für alle $m \in \mathbb{N}$, alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:

> Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Hinweis: Per Induktion nach m ist der Beweis einfach und kurz.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei $\sigma = \{\leqslant\}$ und $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

- $\mathcal{A}$ ist eine *dichte* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und es zwischen je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} b$ ein $c \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b$ gibt.
- $\mathcal{A}$ ist eine *lokal endliche* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und für alle $a, b \in A$ die Menge $\{c \mid a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b\}$ endlich ist.

(Wir verwenden hier $a <^{\mathcal{A}} b$ als Abkürzung für "$a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ und $a \neq b$". Wie in der Vorlesung dürfen Sie in Formeln $x < y$ als Abkürzung für $(x \leqslant y \wedge \neg x = y)$ verwenden.)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Klasse aller dichten linearen Ordnungen ist FO-definierbar.

(b) Die Klasse aller lokal endlichen linearen Ordnungen ist FO-definierbar.