Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

27. November 2018

Logik in der Informatik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 4. Dezember 2018, 11.*^{15} *Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \;:=\; \neg P \;\wedge\; ((Q \wedge P) \to S) \;\wedge\; (\mathbf{1} \to Q) \;\wedge\; (R \vee \neg Q) \;\wedge\; ((W \wedge Q \wedge R) \to \mathbf{0}) \;\wedge\; (\mathbf{0} \to W)$$

(b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma \;:= \{\, \{P\},\ \{Q\},\ \{\neg S, T\},\ \{R\},\ \{\neg Q, \neg S\},\ \{\neg Q, \neg R, T\},\ \{\neg T, \neg W, S\},\ \{\neg Q, \neg P, W\} \,\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

(c) **(i)** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.
(ii) Gibt es eine Formel in AL, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ_1 aus Teilaufgabe Aufgabe 2**(a)** von Blatt 5 bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

(i) reflexiv ist?
(ii) symmetrisch ist?
(iii) antisymmetrisch ist?
(iv) konnex ist?
(v) transitiv ist?

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

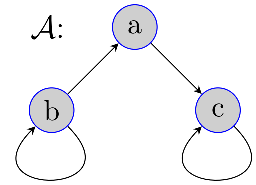
(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i.

(i) $M_1 := \{1,2,3,4,5\}$, $R_1 := \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

(ii) $M_2 := \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $R_2 := \{(x,y) \in M_2 \times M_2 \;:\; x \cdot y \leq 3\}$

Geben Sie für jedes $i \in [2]$ für jede der Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) an, ob die Relation R_i diese jeweils besitzt. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**



(a) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Geben Sie die σ-Struktur $\mathcal{A}$, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird, an.

(b) Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$.

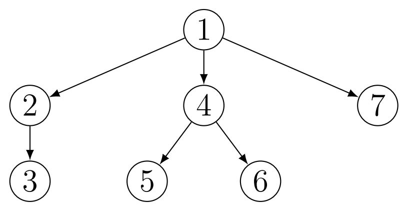
(i) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{W}_w$ für das Wort $w := cabaabbc$ über dem Alphabet Σ an.

(ii) Sei $\mathcal{W}$ die σ_Σ-Struktur mit $W := [5]$, in der $\leqslant^{\mathcal{W}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[5]$ ist und $P_a^{\mathcal{W}} := \{1, 3, 5\}$, $P_b^{\mathcal{W}} := \{2, 4\}$ und $P_c^{\mathcal{W}} := \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{W}$ repräsentiert?

(c) In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f repräsentiert werden.

(i) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum mit Knotenmenge $V \neq \emptyset$ und Kantenmenge $E \subseteq V^2$ durch eine Struktur über der Signatur $\sigma = \{f\}$ modelliert werden kann.

(ii) Geben Sie die entsprechende Struktur für den folgenden Baum an:



(d) Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c. Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(3,3), (5,4), (1,1)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(2,2,4), (5,3,1)\}$, $c^{\mathcal{A}} := 2$
- $B := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(v,v), (z,y), (x,x)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(w,w,y), (z,x,v)\}$, $c^{\mathcal{B}} := w$
- $C := \{a, b, c, d, e\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(e,e), (c,c), (a,b)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(a,c,e), (d,d,b)\}$, $c^{\mathcal{C}} := d$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}} \colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{B}}(x)$	w	v	z	x	y

x	a	b	c	d	e
$f^{\mathcal{C}}(x)$	b	a	d	e	d

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der Teilaufgaben (b) und (c) ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- append([1, 2], [3], X).
```

(b) *Binärbäume* seien definiert, wie in der dritten Prolog-Übungsstunde (vgl. Folie zum Spiegeln von Binärbäumen auf der Website zur Prolog-Übung). Beispielsweise wird der linke dort abgebildete Binärbaum $\mathcal{B}$ repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:

$$B \;:=\; \texttt{tree(tree(leaf(1),tree(leaf(2),leaf(3))),leaf(4))}$$

Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von `B` ist.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(B, X).
```

die Antworten

```
X = 1;     X = 2;      X = 3;      X = 4.
```

liefern.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter von `B` ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Für unseren Baum $\mathcal{B}$ soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(B, Y).
```

die Antwort

```
Y = [1, 2, 3, 4].
```

liefern.

Hinweis: Benutzen Sie gegebenfalls das Prädikat `append/3`.