Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Januar 2018

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 12

Abgabe: *bis 30. Januar 2018, 11.10 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, sei $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, seien $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und seien $x, y \in \mathsf{VAR}$.

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regeln des Sequenzenkalküls.

(a) $\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge$S):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \quad \varphi \\ \Gamma \vdash \quad \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

(b) $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \;\vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \qquad \text{falls } \; y \notin \text{frei}(\Gamma,\, \exists x\varphi,\, \psi)$$

Aufgabe 2: (24 Punkte)

(a) Sei σ eine Signatur und sei $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$. Leiten Sie ähnlich wie in Beispiel 4.19 die Sequenz

$$\varphi \;\vdash\; \neg\neg\varphi$$

im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab.

(b) Sei σ eine Signatur, die ein einstelliges Relationssymbol P enthält. Seien x und y zwei verschiedene Variablen. Leiten Sie die Sequenz

$$P(x),\; \forall x \forall y\, x{=}y \;\vdash\; \forall y\, P(y)$$

im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab.

Aufgabe 3: (26 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen erststufig axiomatisierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um zu zeigen, dass die Klasse aller *nicht* azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen *nicht* erststufig axiomatisierbar ist.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Wir betrachten in dieser Aufgabe Kalküle über der Menge $M := \mathsf{AL}(\{\neg, \rightarrow\})$.

Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M heißt *korrekt*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq M$ und jede Formel $\psi \in M$ gilt: Wenn $\psi \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(\Phi)$, dann gilt $\Phi \models \psi$. Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M heißt *vollständig*, falls für jede Menge $\Phi \subseteq M$ und jede Formel $\psi \in M$ gilt: Wenn $\Phi \models \psi$, dann ist $\psi \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(\Phi)$.

Seien $\mathfrak{K}_{Syl}$ und $\mathfrak{K}_{Abd}$ die beiden folgenden Kalküle über der Menge M: Beide Kalküle enthalten für jede *allgemeingültige* aussagenlogische Formel $\varphi \in M$ das Axiom $\dfrac{}{\varphi}$.

Außerdem enthält

- $\mathfrak{K}_{Abd}$ für alle $\varphi, \psi \in M$ die Ableitungsregel

$$\frac{\psi \qquad (\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi},$$

die *Abduktion* genannt wird,

- $\mathfrak{K}_{Syl}$ für alle $\varphi, \psi, \chi \in M$ die Ableitungsregel

$$\frac{(\varphi \rightarrow \psi) \qquad (\psi \rightarrow \chi)}{(\varphi \rightarrow \chi)},$$

die *Syllogismus* genannt wird.

(a) Geben Sie für $\varphi := \neg(A_0 \rightarrow A_0)$ und $\Phi := \emptyset$ eine möglichst kurze Ableitung von φ aus Φ in $\mathfrak{K}_{Abd}$ an.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{K}_{Abd}$ vollständig, aber nicht korrekt ist.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathfrak{K}_{Syl}$ korrekt, aber nicht vollständig ist.

(d) Betrachten Sie den Kalkül $\mathfrak{K}$ über M, der alle Ableitungsregeln aus $\mathfrak{K}_{Syl}$ und alle Ableitungsregeln aus $\mathfrak{K}_{Abd}$ enthält. Ist $\mathfrak{K}$ korrekt bzw. vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.