

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 2

Abgabe: bis 7. November 2017, 11.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))

Aufgabe 1:

(20 Punkte)

Für das nächste Halloween-Special plant der Konzern für Laramie-Zigaretten zusammen mit Farmer Simpson, die Menschheit mit einer Sucht an Tomacco¹-Ketchup zu plagen. Für die Frucht benötigt man Tabak- und Tomatensamen, sowie radioaktive Strahlung (im Besonderen Plutonium). Zusätzlich fordert der Zigaretten-Konzern, dass das Ketchup eine besondere Note an Tabakgeschmack haben soll, weshalb Farmer Simpsons darüber hinaus Tabakpflanzen anbauen muss. Außerdem möchte der Farmer noch zusätzlich Getreide anbauen, um Futter für die Tiere der anderen Bauern zu haben, damit diese nicht in Versuchung kommen, die Tomacco-Pflanzen zu fressen.

Um den Anbau von Tomacco, Getreide und Tabak zu organisieren, teilt der Farmer sein Land in 20 mal 20 Parzellen ein. Eine Parzelle $\langle i, j \rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 20\}$ ist benachbart zu den Parzellen $\langle i-1, j \rangle$, $\langle i+1, j \rangle$, $\langle i, j-1 \rangle$ und $\langle i, j+1 \rangle$. Parzellen am Rand haben natürlich weniger als vier Nachbarn.

Auf jeder Parzelle kann Plutonium verteilt werden, Tomacco, Tabak (auch Nicotinia) oder Getreide angepflanzt werden.

Um den Anbau genau zu planen, benutzt der Farmer Aussagensymbole $G_{i,j}$, $N_{i,j}$, $P_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 20\}$. Hierzu beschreibt $N_{7,11}$, dass der Farmer auf Parzelle $\langle 7, 11 \rangle$ Tabak (Nicotinia) angebaut. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

(a) Tomacco gedeiht auf einer Parzelle nur, wenn diese auch mit Plutonium kontaminiert ist. Geben Sie eine Formel φ_1 an, die repräsentiert, dass auf jedem Feld, in der Tomacco gepflanzt wird auch Plutonium verteilt werden muss.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, 20\}} (G_{i,j} \vee N_{i,j} \vee T_{i,j} \vee P_{i,j})$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Das Getreide wird schlecht, wenn es direkt neben einem radioaktiven Feld gedeihen muss. Geben Sie eine Formel φ_3 an, die repräsentiert, dass jedes Getreidefeld nicht mit einem mit Plutonium kontaminierten Feld benachbart sein darf.

(d) Der Farmer möchte die Felder seiner Nachbarn nicht unnötig verseuchen. Daher darf auf keiner Parzelle am Rand Plutonium verteilt werden. Geben Sie eine Formel φ_4 an, die besagt, dass auf einem Feld am Rand kein Plutonium verteilt werden darf.

¹Bekannt aus der Serie "Die Simpsons" (Folge: Duell bei Sonnenaufgang)

Aufgabe 2:**(30 Punkte)**

- (a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\varphi_1 := (A_1 \wedge \mathbf{0})$

(iii) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^n (A_i \leftrightarrow A_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(ii) $\varphi_2 := (\neg(A_0 \rightarrow \neg A_1) \rightarrow A_1)$

- (b) Sei $\varphi_3 := ((A_0 \vee A_1) \rightarrow (A_0 \wedge A_1))$ und seien φ_1 und φ_2 wie in Aufgabenteil (a) definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist.} \end{cases}$$

Sei $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$. Beweisen Sie, dass tatsächlich $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

- (a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1)$

$\varphi_3 := (A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$

$\varphi_2 := ((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2))$

$\varphi_4 := (\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0))$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (b) Seien $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ endliche Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Gilt dann in jedem Fall, dass die Bedingung

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \equiv \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

erfüllt ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 2 aus "Learn Prolog Now!".

- (a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

(i) `vegan` und `chicken`(v) `gets(scott, Y)` und `gets(X, '1-Up')`(ii) `theClashAtDemonhead(X)` und
`theClashAtDemonhead(envy)`(vi) `band(kim, X, Y)` und `band(X, Y, stephen)`(iii) `BaldwinSteps` und `'BaldwinSteps'`(vii) `nonVegan(coffee(halfAndHalf), X)` und
`nonVegan(coffee(Y), gelato(eggs, Y))`(iv) `bass` und `'bass'`

- (b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4 (b) von Blatt 1 (ohne die Erweiterung in (c)). Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

?- `fights(scott, X)`.