Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. November 2014

Logik in der Informatik

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 12. November 2014, 9.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Der Weltraum – unendliche Weiten. Wir befinden uns in einer fernen Zukunft. Die nahezu unsterblichen außerirdischen Lebensformen der *Kwew* sind dermaßen von den anderen Lebensformen im Universum und sich selbst gelangweilt, dass sie beschließen, (abzählbar) unendlich viele Androiden mit variierender Programmierung zu erschaffen und jeden der Androiden auf einen der (abzählbar) unendlich vielen bewohnten Planeten zu schicken, damit diese dort „unterhaltsame" Konflikte auslösen.

Damit es nicht gleich zu alles Leben auslöschenden Weltkriegen kommt, darf maximal ein Android auf jeden Planeten geschickt werden. Aufgrund ihrer variierenden Programmierung bevorzugt jeder Android bestimmte Planeten. Da der Speicher der Androiden begrenzt ist, kann jeder Android nur endlich viele Planeten in seine Liste bevorzugter Planeten aufnehmen.

Nun stellt sich für die Kwew das Problem, dass sie die Androiden gemäß den obigen Bedingungen und den Wünschen der Androiden auf die bewohnten Planeten aufteilen müssen.

Sei A die unendliche Menge der Androiden und P die unendliche Menge der Planeten. Ferner sei $\heartsuit := \{\{a, p\} \mid a \in A,\, p \in P$ und a hat p in seiner Liste bevorzugter Planeten$\}$. Stehe das Aussagensymbol $V_{a,p}$ dafür, dass der Android a den Planet p als neue Heimat zugewiesen bekommt.

(a) Erstellen Sie eine aussagenlogische Formelmenge Φ_1, die repräsentiert, dass jedem Android mindestens ein Planet aus seiner Liste bevorzugter Planeten zugewiesen wurde.

(b) Erstellen Sie eine aussagenlogische Formelmenge Φ_2, die repräsentiert, dass jedem Androiden maximal einer der von ihm bevorzugten Planeten zugewiesen wurde.

(c) Erstellen Sie eine aussagenlogische Formelmenge Φ_3, die repräsentiert, dass keinem Planeten mehrere der ihn bevorzugenden Androiden zugewiesen wurden.

(d) Beweisen Sie, dass die Kwew genau dann alle Androiden, den obigen Regeln entsprechend, den bewohnten Planeten zuweisen können, wenn dies für jede endliche Teilmenge der Androiden möglich ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF und/oder NNF ist.

(i) $(V_7 \wedge V_{42} \wedge \neg V_{1337})$

(ii) $\Big(\big((\neg V_9 \vee V_1) \wedge V_3\big) \vee \neg V_8\Big)$

(iii) $\big((V_2 \vee \neg V_4) \wedge V_8 \wedge \neg V_{16}\big)$

(iv) $\Big(\bigvee_{i=3}^{8} \Big(\bigvee_{j=15}^{27} \Big(\bigwedge_{k=1}^{98} V_{i,j,k} \Big)\Big)\Big)$

(b) Wandeln Sie wie in der Vorlesung beschrieben die Formel

$$\varphi := \Big(\Big(\big(V_0 \to (\neg V_1 \vee V_2)\big) \to V_3\Big) \wedge \Big((V_1 \vee \neg V_3) \to V_0\Big)\Big)$$

in äquivalente Formeln φ_{DNF} in DNF und φ_{KNF} in KNF um. Dokumentieren Sie dabei Ihre Zwischenschritte.

(c) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 die Formel

$$\varphi := \Big(\big((V_0 \vee \neg V_1) \wedge V_2\big) \to \neg(V_1 \vee \neg V_2)\Big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Lesen Sie Satz 2.46 aus der Vorlesung.

(a) Bestimmen Sie alle Interpretationen, die φ_n erfüllen und bei denen die Interpretation nur eines Aussagensymbols abgeändert werden muss, damit φ_n nicht mehr erfüllt wird.

(b) Beweisen Sie Satz 2.46.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \ldots, \kappa_N$ mindestens zwei essentiell verschiedene Interpretationen aus (a) erfüllt. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Aussage korrekt ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist digital über das GOYA-System abzugeben!

Im Folgenden kodieren wir Läufe aus Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen durch Terme: Das Atom `start` ist ein Lauf. Ist `X` ein Lauf, dann sind auch `vorwaerts(X)` und `zurueck(X)` Läufe.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `lauf(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist.

(b) Schreiben Sie ein Prädikat `laufDerDinge(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist, in dem nach jedem `vorwaerts`-Schritt mindestens zwei `zurueck`-Schritte ausgeführt werden. Beispielsweise soll der Term `zurueck(zurueck(vorwaerts(start)))` das Prädikat erfüllen, `vorwaerts(zurueck(zurueck(start)))` jedoch nicht.

(c) Im Folgenden sei $|\texttt{X}|_{\texttt{vorwaerts}}$ die Anzahl der `vorwaerts`-Schritte in einem Lauf `X` und $|\texttt{X}|_{\texttt{zurueck}}$ die Anzahl der `zurueck`-Schritte. Beispielsweise ist $|\texttt{start}|_{\texttt{vorwaerts}} = 0$ und $|\texttt{vorwaerts(zurueck(start))}|_{\texttt{zurueck}} = 1$.

Schreiben Sie ein Prädikat `endeGutAllesGut(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist und *mehr* `vorwaerts`- als `zurueck`-Schritte enthält.

Hinweis: Definieren Sie ein Hilfsprädikat `endeGutAllesGut(X, Y)`, das genau dann für einen Lauf `X` mit $n = |\texttt{X}|_{\texttt{vorwaerts}} - |\texttt{X}|_{\texttt{zurueck}}$ und einen Lauf `Y` gilt, wenn

- $n < 0$, $|\texttt{Y}|_{\texttt{vorwaerts}} = 0$ und $|\texttt{Y}|_{\texttt{zurueck}} = -n$, d.h. `Y` besteht aus n `zurueck`-Schritten,
- $n = 0$ und $|\texttt{Y}|_{\texttt{vorwaerts}} = |\texttt{Y}|_{\texttt{zurueck}} = 0$, d.h. $\texttt{Y} = \texttt{start}$, oder
- $n > 0$, $|\texttt{Y}|_{\texttt{vorwaerts}} = n$ und $|\texttt{Y}|_{\texttt{zurueck}} = 0$, d.h. `Y` besteht aus n `vorwaerts`-Schritten.