

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

Übungsblatt 10

zu bearbeiten bis: 14. Juli 2026, 09.00 Uhr

Aufgabe 1:

(34 Punkte)

Betrachten Sie die Beweisidee für Behauptung 2 auf den Seiten 1.44 und 1.45 der handschriftlichen Notizen. Arbeiten Sie aus, wie genau E^G in Zeit $\mathcal{O}(|A|)$ berechnet werden kann.

Aufgabe 2:

(33 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist, Theorem 1.18 (siehe Seite 1.33 der handschriftlichen Notizen) um eine „dynamische Komponente“ zu erweitern. Wir halten eine Gradschranke $d \geq 2$ und eine Signatur σ fest und betrachten die folgenden Update-Operationen:

Für $R \in \sigma$, $k = \text{ar}(R)$ und beliebige Elemente $a_1, \dots, a_k$ (diese müssen nicht unbedingt zum Universum der aktuellen Struktur gehören) bewirkt die Update-Operation

- $U := \text{delete } R(a_1, \dots, a_k)$,
dass das Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ aus der Relation R gelöscht wird (falls es dort gar nicht enthalten war, ändert sich nichts). Ist also $\mathcal{A}$ eine σ -Struktur, so ist $U(\mathcal{A})$ die σ -Struktur $\mathcal{B}$ mit Universum $B = A$ und $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \setminus \{(a_1, \dots, a_k)\}$ und $S^{\mathcal{B}} = S^{\mathcal{A}}$ für alle $S \in \sigma \setminus \{R\}$.
- $U := \text{insert } R(a_1, \dots, a_k)$,
dass das Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ in die Relation R eingefügt wird (falls es dort bereits enthalten war, ändert sich nichts); falls jedoch durch das Einfügen der Grad der Struktur $> d$ wird, bleibt die Struktur unverändert. Ist also $\mathcal{A}$ eine σ -Struktur, so sei $\mathcal{B}$ die σ -Struktur mit Universum $B = A \cup \{a_1, \dots, a_k\}$ und $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cup \{(a_1, \dots, a_k)\}$ und $S^{\mathcal{B}} = S^{\mathcal{A}}$ für alle $S \in \sigma \setminus \{R\}$. Falls $\text{Grad}(\mathcal{B}) \leq d$, so setzen wir $U(\mathcal{A}) := \mathcal{B}$; andernfalls setzen wir $U(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$.

Wir halten nun einen $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satz φ fest. Bei Eingabe einer σ -Struktur $\mathcal{A}$ wollen wir in Zeit $\mathcal{O}(|A|)$ eine geeignete Datenstruktur erzeugen. Diese soll die beiden folgenden Dinge ermöglichen:

- Bei Eingabe von „?“ soll in Zeit $\mathcal{O}(1)$ die korrekte Antwort auf die Frage „Wird φ von der Struktur erfüllt?“ ausgegeben werden.
Hierbei ist mit „Struktur“ die aktuell in der Datenstruktur repräsentierte σ -Struktur gemeint (zu Beginn ist dies die σ -Struktur $\mathcal{A}$).
- Bei Eingabe einer Update-Operation U soll die Datenstruktur in Zeit $\mathcal{O}(1)$ so abgeändert werden, dass sie anstelle der bisherigen σ -Struktur $\mathcal{A}'$ nun die σ -Struktur $U(\mathcal{A}')$ repräsentiert.

Wie kann dies bewerkstelligt werden? Beweisen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.

Aufgabe 3:**(33 Punkte)**

Lösen Sie die am Ende von Kapitel 1 auf Seite 1.58 angegebene Übungsaufgabe:

Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ sei $\|G\| := |V| + |E|$.

Finden Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe eines beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ (von beliebigem Grad) nach $\mathcal{O}(\|G\| \cdot \log\|G\|)$ Vorverarbeitungszeit mit konstanter Taktung die Menge $V^2 \setminus E = \llbracket \neg E(z_1, z_2) \rrbracket^{\mathcal{G}}$ ausgibt.

Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus korrekt ist und die Laufzeitvorgaben einhält.