

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

Übungsblatt 6

zu bearbeiten bis: 9. Juni 2026, 09.00 Uhr

Aufgabe 1:

(34 Punkte)

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ die Signatur mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h . Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist das $(k \times \ell)$ -Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ -Struktur mit Universum $[k] \times [\ell]$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \left\{ \left((i, j), (i+1, j) \right) : 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq \ell \right\} \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \left\{ \left((i, j), (i, j+1) \right) : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j < \ell \right\} \end{aligned}$$

Sei *Diag* die 1-stellige Anfrage, die für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ dem Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die Diagonale

$$\text{Diag}(\mathcal{G}_{k,\ell}) := \{ (i, i) : 1 \leq i \leq \min(k, \ell) \}$$

zuordnet. Ist diese Anfrage FO+MOD-definierbar in der Klasse $\mathbf{S} := \{\mathcal{G}_{k,\ell} : k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2:

(33 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für jede endliche relationale Signatur σ , jede Klasse $\mathbf{S}$ von σ -Strukturen und jede Anfrage Q gilt:

$$Q \text{ ist FO+MOD-definierbar auf } \mathbf{S} \implies Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathbf{S} \text{ bzgl. FO+MOD.}$$

Gilt auch die Umkehrung, d. h. gilt für jede Anfrage Q :

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathbf{S} \text{ bzgl. FO+MOD} \implies Q \text{ ist FO+MOD-definierbar auf } \mathbf{S} ?$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3:

(33 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ mit $\text{ar}(E) = 2$. Wir definieren die FO[σ]-Formeln $\text{enc}_h(x)$ für alle $h \in \mathbb{N}$ wie folgt: $\text{enc}_0(x) := \neg \exists y E(x, y)$, und für alle $h \geq 1$ sei $\text{enc}_h(x) :=$

$$\forall y \left(E(x, y) \rightarrow \text{enc}_{h-1}(y) \right) \wedge \forall y \forall y' \left((E(x, y) \wedge E(x, y') \wedge \neg y=y') \rightarrow \neg \text{eq}_{h-1}(y, y') \right)$$

Geben Sie eine präzise Beschreibung dafür an, was diese Formel genau besagt (analog zur Formulierung von Lemma 4.5), und geben Sie eine möglichst kleine obere Schranke (im Sinne der $\mathcal{O}$ -Notation) für die Länge der Formel $\text{enc}_h(x)$ in Abhängigkeit von h an und beweisen Sie, dass diese tatsächlich eine obere Schranke ist.