

# Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

## Übungsblatt 4

zu bearbeiten bis: 26. Mai 2026, 09.00 Uhr

### Aufgabe 1:

(14 Punkte)

Sei  $\sigma := \{E\}$  für ein 2-stelliges Relationssymbol  $E$ . Sei  $C$  die Klasse aller endlichen gerichteten Graphen  $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ , für die gilt: Die Zahl  $|A| + |E^{\mathcal{A}}|$  ist eine Primzahl. Ist  $C$  Hanf-lokal in der Klasse  $S$  aller endlichen gerichteten Graphen? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

### Aufgabe 2:

(2 × 13 = 26 Punkte)

Sei  $\sigma := \{E\}$  für ein 2-stelliges Relationssymbol  $E$ , seien  $x, y$  zwei verschiedene Variablen und sei

$$\varphi(x, y) := \neg x=y \wedge \forall z (E(x, z) \vee E(y, z)).$$

Geben Sie eine Feferman-Vaught-Zerlegung in FO von  $\varphi$  bzgl.  $((x); (y))$  und eine Feferman-Vaught-Zerlegung in FO von  $\varphi$  bzgl.  $((x, y); ())$  an und weisen Sie nach, dass Ihre Antworten korrekt sind.

### Aufgabe 3:

(30 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 2.6. Zur Erinnerung:

**Korollar 2.6.** Sei  $L \in \{FO, FO+MOD\}$ . Sei  $\sigma$  eine Signatur. Sei  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , seien  $x_1, \dots, x_k, y$   $k+1$  verschiedene Variablen, und sei  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ .

Bei Eingabe einer Zahl  $r \in \mathbb{N}$  und einer  $r$ -lokalen  $L[\sigma]$ -Formel  $\lambda(\bar{x}, y)$  mit  $\text{frei}(\lambda) \subseteq \{x_1, \dots, x_k, y\}$  kann eine endliche, nicht-leere Menge  $\Delta'$  von Paaren  $(\alpha'(\bar{x}), \beta'(y))$  von  $r$ -lokalen  $L[\sigma]$ -Formeln berechnet werden, sodass gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^k \text{dist}(x_i, y) > 2r+1 \wedge \lambda(\bar{x}, y) \quad \equiv \quad \bigwedge_{i=1}^k \text{dist}(x_i, y) > 2r+1 \wedge \bigvee_{(\alpha', \beta') \in \Delta'} (\alpha'(\bar{x}) \wedge \beta'(y)).$$

### Aufgabe 4:

(30 Punkte)

Sei  $\sigma := \emptyset$ , sei  $\mathcal{P} := \{S\}$  mit  $S = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$  und sei  $k = \ell = 0$  und  $\bar{x} = \bar{y} = ()$ .

Betrachten Sie den FO( $\mathcal{P}$ )[ $\sigma$ ]-Satz  $\varphi := S(\#(z).z=z)$ . Gibt es eine Feferman-Vaught-Zerlegung in FO( $\mathcal{P}$ ) von  $\varphi$  bzgl.  $(\bar{x}; \bar{y})$ ? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.