

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

Übungsblatt 3

zu bearbeiten bis: 12. Mai 2026, 09.00 Uhr

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Sei $\sigma := \{X\}$, wobei X ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Sei $S := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Quadratzahlen und sei $\mathcal{P} := \{S\}$.

Definition: Ein *starker Hanf-Zählsatz* der Signatur σ für $\text{FO}(\mathcal{P})$ ist von der Form $(P+m)(t)$, wobei $P \in \mathcal{P} \cup \{\mathbb{N}_{\geq 1}\}$, $m \in \mathbb{Z}$ und t ein Typen-1-Zählterm der Signatur σ ist.

Definition: Eine *starke HNF-Formel* für $\text{FO}(\mathcal{P})$ der Signatur σ ist eine Boolesche Kombination von starken Hanf-Zählsätzen der Signatur σ für $\text{FO}(\mathcal{P})$ und Formeln der Form $\text{sph}_{\tau,r}(x_1, \dots, x_k)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und τ ein r -Typ mit k Zentren über σ .

Betrachten Sie den $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satz $\varphi := S(\#(x).x=x)$. Beweisen Sie, dass es keinen zu φ äquivalenten Satz gibt, der eine starke HNF-Formel für $\text{FO}(\mathcal{P})$ der Signatur σ ist.

Hinweis: Dies zu beweisen ist nicht so ganz einfach. Falls Ihnen kein Lösungsansatz einfällt, schauen Sie sich Lemma 4.1 der Arbeit [HKS16] an.

Aufgabe 2:

(40 Punkte)

Als das *Spektrum* eines $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satzes φ bezeichnen wir die Menge

$$\text{SPEC}_{\sigma}(\varphi) := \{|A| : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Sei $\sigma := \emptyset$ und sei $\mathcal{P} := \{5\mathbb{Z}\}$ mit $5\mathbb{Z} := \{5 \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$. Geben Sie eine möglichst elegante Beschreibung genau derjenigen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ an, für die es einen $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satz φ gibt, sodass $M = \text{SPEC}_{\sigma}(\varphi)$. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3:

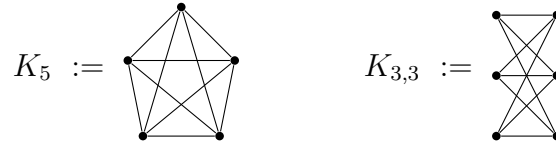
(30 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist und sei $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Gibt es einen $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satz φ , sodass für alle endlichen ungerichteten Graphen G und die zu G gehörende σ -Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff G \text{ ist planar?}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist. Beachten Sie hierfür den auf der Rückseite stehenden Hinweis.

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:



Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G , wenn es eine Folge $G_1, \dots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geq 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \dots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5 :

