

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

Übungsblatt 2

zu bearbeiten bis: 5. Mai 2026, 09.00 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise zum Erwerb von Übungspunkten unter hu.berlin/akl.

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 0.3(e):

Lemma 0.3. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$. Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Struktur von Grad $\leq d$. Sei $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$. Dann gilt:

- (e) Sei $\mathcal{B}$ eine σ -Struktur von Grad $\leq d$ und sei $\bar{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.
Bei Eingabe von $\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b}$ können wir in Zeit

$$(k \cdot \nu_d(r))^{\mathcal{O}(\|\sigma\| + k \cdot \nu_d(r))} \leq 2^{\mathcal{O}(\|\sigma\| k^2 \nu_d(r)^2)} \leq 2^{\mathcal{O}(\|\sigma\| k^2 d^{2r+2})}$$

testen, ob $(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), a_1, \dots, a_k) \cong (\mathcal{N}_r^{\mathcal{B}}(\bar{b}), b_1, \dots, b_k)$ gilt.

Aufgabe 2:

(25 + 20 = 45 Punkte)

- (a) Beweisen Sie Lemma 0.4 (einschließlich der zweiten Aussage):

Lemma 0.4. Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Signatur σ und Zahlen $d \geq 2, r \geq 0, k \geq 1$ eine Liste $\mathcal{L}_r^{\sigma, d}(k) = \tau_1, \dots, \tau_\ell$ (für eine geeignete Zahl ℓ) von r -Typen mit k Zentren von Grad $\leq d$ über σ berechnet, sodass für jeden r -Typen τ mit k Zentren von Grad $\leq d$ über σ gilt: Es gibt genau ein $i \in [\ell]$ sodass $\tau \cong \tau_i$.

Die Laufzeit des Algorithmus ist $2^{(k \cdot \nu_d(r)) \mathcal{O}(\|\sigma\|)}$.

Außerdem können wir bei Eingabe von τ in Zeit $2^{(k \cdot \nu_d(r)) \mathcal{O}(\|\sigma\|)}$ die Zahl $i \in [\ell]$ berechnen, für die $\tau \cong \tau_i$ gilt.

- (b) Sei $\sigma := \{X\}$, wobei X ein 1-stelliges Relationssymbol ist.

Seien $d \geq 2$ und $r \geq 0$ beliebig gewählt.

Geben Sie für die gegebene Signatur $\sigma = \{X\}$ die gemäß (a) erzeugte Liste $\mathcal{L}_r^{\sigma, d}(1)$ aller r -Typen mit 1 Zentrum vom Grad $\leq d$ über σ an.

Aufgabe 3:

(5 + 25 = 30 Punkte)

Sei $\sigma := \{X\}$, wobei X ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Sei $S := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Quadratzahlen und sei $\mathcal{P} := \{S\}$. Betrachten Sie den $\text{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ -Satz $\varphi := S(\#(x).x=x)$.

- (a) Was besagt der Satz φ , d. h. welche σ -Strukturen erfüllen φ ?
(b) Geben Sie einen zu φ äquivalenten Satz an, der eine HNF-Formel (gemäß Definition 1.3 der Vorlesung) ist. Begründen Sie, warum dies eine HNF-Formel ist und warum sie äquivalent zu φ ist.