

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2026

Übungsblatt 1

zu bearbeiten bis: 28. April 2026, 09.00 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise zum Erwerb von Übungspunkten unter hu.berlin/akl.

Aufgabe 1:

(20 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 0.1(a):

Sei σ eine Signatur und sei $r \in \mathbb{N}$. Es gibt eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel $\text{dist}_{\leq r}(x, y)$, sodass für alle σ -Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a, b \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \text{dist}_{\leq r}[a, b] \iff \text{dist}^{\mathcal{A}}(a, b) \leq r.$$

Aufgabe 2:

(30 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 0.1(b):

Sei σ eine Signatur und sei $r \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei τ ein r -Typ mit k Zentren. Für jedes $r' \in \mathbb{N}$ mit $r' \geq r$ gibt es eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel $\text{sph}_{\tau, r'}(x_1, \dots, x_k)$, sodass für alle σ -Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a_1, \dots, a_k \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \text{sph}_{\tau, r'}[a_1, \dots, a_k] \iff (\mathcal{N}_{r'}^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_k), a_1, \dots, a_k) \cong \tau.$$

Aufgabe 3:

(20 + 20 + 10 = 50 Punkte)

Sei σ eine beliebige Signatur, sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq 2$, sei $\varphi(x_1, \dots, x_\ell)$ eine $\text{FO}+\text{MOD}[\sigma]$ -Formel mit ℓ freien Variablen $x_1, \dots, x_\ell$, und sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

- (a) Definieren Sie für jedes $i \in [0, m)$ eine Menge $T_i \subseteq [0, m)^m$, sodass Folgendes für alle Mengen A, B und jede endliche Teilmenge M von $B \times A$ gilt:

$$|M| \equiv i \pmod{m} \iff \text{ex. } (t_0, \dots, t_{m-1}) \in T_i \text{ mit } |L_j| \equiv t_j \pmod{m} \text{ f. a. } j \in [0, m).$$

Hier werden folgende Notationen verwendet: Für alle $a \in A$ ist $M_a := \{b \in B : (b, a) \in M\}$ und für alle $j \in [0, m)$ ist $L_j := \{a \in A : |M_a| \equiv j \pmod{m}\}$.

- (b) Konstruieren Sie für jedes $i \in [0, m)$ eine $\text{FO}+\text{MOD}[\sigma]$ -Formel $\psi_i(x_3, \dots, x_\ell)$, sodass für alle σ -Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a_3, \dots, a_\ell \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi_i[a_3, \dots, a_\ell] \iff |\{(a_1, a_2) \in A^2 : \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_\ell]\}| \equiv i \pmod{m}.$$

Hinweis: Die in (a) definierten Mengen können für die Konstruktion hilfreich sein.

- (c) Konstruieren Sie für jedes $i \in [0, m)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq \ell$ eine $\text{FO}+\text{MOD}[\sigma]$ -Formel $\psi_{i,k}(x_{k+1}, \dots, x_\ell)$, sodass für alle σ -Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a_{k+1}, \dots, a_\ell \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi_{i,k}[a_{k+1}, \dots, a_\ell] \iff |\{(a_1, \dots, a_k) \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_\ell]\}| \equiv i \pmod{m}.$$

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.