

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

Abgabe: bis 12. Mai 2025, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle

Beachten Sie die Abgabehinweise von Blatt 1

Aufgabe 1:

(35 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) A_{23}

(ii) $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii) $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg \mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg \mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathbf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn $\tilde{\varphi}$ nicht allgemeingültig ist, dann ist φ erfüllbar.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in \mathbf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\llbracket X \tilde{\rightarrow} Y \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1 - \llbracket X \rightarrow Y \rrbracket^{\mathcal{I}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:

(30 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1)$$

$$\varphi_3 := (A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2))$$

$$\varphi_2 := ((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2))$$

$$\varphi_4 := (\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0))$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \equiv \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3:**(35 Punkte)**

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma der Aussagenlogik. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Geben Sie die rekursive Definition einer Funktion $as : \mathbf{AL} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{AS})$ an, so dass für jedes $\varphi \in \mathbf{AL}$ gilt: $as(\varphi)$ ist genau die Menge aller Aussagensymbole, die in φ vorkommen.
- (b) Beweisen Sie, dass für jedes $\varphi \in \mathbf{AL}$ gilt:

Für alle Interpretationen $\mathcal{I}_1 : \mathbf{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ und $\mathcal{I}_2 : \mathbf{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{I}_1(X) = \mathcal{I}_2(X)$ für alle $X \in as(\varphi)$ gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.