Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

20. Juni 2025

Automatentheorie

Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis: *27. Juni 2025, 12:45 Uhr*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Sei $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_0$ mit $\Sigma_0 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{f\}$.

Betrachten Sie den folgenden DbuTA $\mathfrak{A} = (\Sigma, Q, \delta, F)$, mit:

- $Q = \{q_a, q_b, q_{aa}, q_{ab}, q_{ba}, q_{bb}\}$, $F = \{q_{aa}\}$ und
- δ :

$$\delta(a) = q_a \qquad \delta(b) = q_b$$

und für $\delta(x, y, f)$:

$x \setminus y$	q_a	q_b	q_{aa}	q_{ab}	q_{ba}	q_{bb}
q_a	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}
q_b	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}
q_{aa}	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}
q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}	q_{aa}	q_{ab}
q_{ba}	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}
q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}	q_{ba}	q_{bb}

Minimieren Sie $\mathfrak{A}$, analog zum Beispiel der Vorlesung.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{f\}$.

Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Baumsprachen an:

(a) $T_a = \{t \in T_\Sigma \,|\, \text{die Höhe des Baumes } t \text{ ist mindestens 2 }\}$

(b) $T_b = \{t \in T_\Sigma \,|\, \text{alle Blätter des Baumes } t \text{ haben gerade Höhe }\}$

(c) $T_c = \{t \in T_\Sigma \,|\, \text{die Blattbeschriftung von } t\text{, von links nach rechts gelesen, hat den Infix } ba \text{ }\}$

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Welche Baumsprachen beschreiben die folgenden regulären Ausdrücke?

(a) Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_3$ mit $\Sigma_0 = \Sigma_3 = \{0, 1\}$.

$$\left[\left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ / & | & \backslash \\ c_1 & c_0 & c_1 \end{array} \right)^{*c_0} \cdot^{c_0} 0 \right] \cdot^{c_1} 1$$

(b) Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$.

$$\left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{0} \\ / & \backslash \\ c_0 & c_0 \end{array} \right)^{*c_0} \cdot^{c_0} \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{1} \\ / & \backslash \\ c_1 & c_1 \end{array} \cdot^{c_1} \left(\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{0} \\ / & \backslash \\ c_0 & c_0 \end{array} \right)^{*c_0} \cdot^{c_0} 0 \right]$$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{f\}$.

Betrachten Sie die Baumsprache T_1 und T_2:

$$T_1 := \left\{ t \in T_\Sigma \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{der ganz linke Blattknoten ist mit einem } a \text{ und} \\ \text{der ganz rechte Blattknoten ist mit einem } b \text{ beschriftet} \end{array} \right\}$$

$$T_2 := \left\{ t \in T_\Sigma \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{in der Blattbeschriftung von } t \text{ gibt es, von links} \\ \text{nach rechts gelesen, ein } a \text{ direkt vor eine } b \end{array} \right\}$$

Geben Sie je einen MSO-Satz φ_i für $i \in [2]$ über der Signatur σ_Σ an, so dass gilt $\varphi_i(T) = T_i$. Erläutern Sie, warum Ihre Sätze die richtige Baumsprache definiert.

Aufgabe 5: **(20 Punkte)**

Sei Σ ein Alphabet mit Rang und $\mathcal{L}$ eine reguläre Wortsprache über Σ_0. Betrachten Sie die Sprache

$$T_\mathcal{L} = \{t \in \mathfrak{T}_\Sigma : \text{die Blattbeschriftung von } t \text{ liegt in } \mathcal{L}\}$$

Zeigen Sie, dass $T_\mathcal{L}$ regulär ist.

Anmerkung: Falls $\mathcal{L}$ sternfrei regulär ist, können Sie sogar zeigen, dass es einen $\mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz gibt, der $T_\mathcal{L}$ beschreibt.