

# Automatentheorie

Sommersemester 2025

## Übungsblatt 6

**Zu bearbeiten bis:** 20. Juni 2025, 13:00 Uhr

**Definition:** Sei  $\Sigma$  ein Alphabet mit Rang. Die Funktion  $\text{leaves} : \mathfrak{T}_\Sigma \rightarrow \Sigma_0^*$  sei die Funktion, die jedem Baum  $t \in \mathfrak{T}_\Sigma$  seine *Blattbeschriftung von  $t$*  zuordnet, also das Wort  $w \in \Sigma_0^*$ , welches sich ergibt, wenn die Beschriftungen der Blätter des Baumes von links nach rechts gelesen werden (vergleiche Definition 3.10).

### Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a) Falls  $G$  eine kontextfreie Grammatik ist, so existiert ein Alphabet  $\Sigma$  mit Rang und eine reguläre Baumsprache  $T \subseteq \mathfrak{T}_\Sigma$ , sodass  $\mathcal{L}(G) = \{\text{leaves}(t) : t \in T\}$  ist.
- (b) Sei  $\Sigma$  ein Alphabet mit Rang. Falls  $T \subseteq \mathfrak{T}_\Sigma$  regulär ist, so existiert eine Grammatik  $G$  über  $\Sigma_0$ , sodass  $\mathcal{L}(G) = \{\text{leaves}(t) : t \in T\}$  ist.

### Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Sei  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$  mit  $\Sigma_0 = \{a, b\}$  und  $\Sigma_2 = \{f\}$ .

Betrachten Sie die folgenden Baumsprachen  $T_1, \dots, T_4$  und entscheiden sie zu jeder, ob diese regulär ist oder nicht. Für jedes  $i \in [4]$ , geben Sie einen Baumentautomaten  $\mathfrak{A}_i$  mit  $T(\mathfrak{A}_i) = T_i$  an, falls die Sprache  $T_i$  regulär ist, andernfalls zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung, dass die Sprache  $T_i$  nicht regulär ist.

- (a)  $T_1 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{alle Blätter in } t \text{ besitzen gerade Höhe}\},$
- (b)  $T_2 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{alle Blätter in } t \text{ besitzen gleiche Höhe}\},$
- (c)  $T_3 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{in der Blattbeschriftung von } t \text{ wechseln sich die Buchstaben } a \text{ und } b \text{ ab}\}$   
und
- (d)  $T_4 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{die Blattbeschriftung von } t \text{ ist ein Wort aus } \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}\}.$

**Aufgabe 3:****(25 Punkte)**

Sei  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$  mit  $\Sigma_0 = \{a, b\}$  und  $\Sigma_2 = \{f\}$ .

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen  $T_1$  und  $T_2$  NtdTA  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  an, so dass  $T(\mathfrak{A}_1) = T_1$  und  $T(\mathfrak{A}_2) = T_2$ .

$$(a) \quad T_1 = \left\{ t \in T_\Sigma \mid \begin{array}{l} \text{alle Blätter in } t \text{ sind ausschließlich mit } a\text{'s} \\ \text{oder ausschließlich mit } b\text{'s beschriftet.} \end{array} \right\}$$

$$(b) \quad T_2 = \left\{ t \in T_\Sigma \mid \begin{array}{l} \text{es gibt zwei Blätter } u \text{ und } v \text{ von } t, u \text{ ist mit } a \text{ beschriftet,} \\ v \text{ ist mit } b \text{ beschriftet und } u \text{ liegt links von } v \end{array} \right\}$$

**Aufgabe 4:****(25 Punkte)**

Sei  $\mathcal{T}$  die Klasse der von deterministischen Top-down-Baumautomaten erkannten Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

- (a)  $\mathcal{T}$  ist unter Schnitt abgeschlossen.
- (b)  $\mathcal{T}$  ist unter Vereinigung abgeschlossen.
- (c)  $\mathcal{T}$  ist unter Komplement abgeschlossen.