

Automatentheorie

Sommersemester 2025

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis: 20. Juni 2025, 13:00 Uhr

Definition: Sei Σ ein Alphabet mit Rang. Die Funktion $\text{leaves} : \mathfrak{T}_\Sigma \rightarrow \Sigma_0^*$ sei die Funktion, die jedem Baum $t \in \mathfrak{T}_\Sigma$ seine *Blattbeschriftung von t* zuordnet, also das Wort $w \in \Sigma_0^*$, welches sich ergibt, wenn die Beschriftungen der Blätter des Baumes von links nach rechts gelesen werden (vergleiche Definition 3.10).

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

- (a) Falls G eine kontextfreie Grammatik ist, so existiert ein Alphabet Σ mit Rang und eine reguläre Baumsprache $T \subseteq \mathfrak{T}_\Sigma$, sodass $\mathcal{L}(G) = \{\text{leaves}(t) : t \in T\}$ ist.
- (b) Sei Σ ein Alphabet mit Rang. Falls $T \subseteq \mathfrak{T}_\Sigma$ regulär ist, so existiert eine Grammatik G über Σ_0 , sodass $\mathcal{L}(G) = \{\text{leaves}(t) : t \in T\}$ ist.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{f\}$.

Betrachten Sie die folgenden Baumsprachen T_1, \dots, T_4 und entscheiden sie zu jeder, ob diese regulär ist oder nicht. Für jedes $i \in [4]$, geben Sie einen Baumautomaten \mathfrak{A}_i mit $T(\mathfrak{A}_i) = T_i$ an, falls die Sprache T_i regulär ist, andernfalls zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung, dass die Sprache T_i nicht regulär ist.

- (a) $T_1 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{alle Blätter in } t \text{ besitzen gerade Höhe}\}$,
- (b) $T_2 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{alle Blätter in } t \text{ besitzen gleiche Höhe}\}$,
- (c) $T_3 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{in der Blattbeschriftung von } t \text{ wechseln sich die Buchstaben } a \text{ und } b \text{ ab}\}$
und
- (d) $T_4 = \{t \in T_\Sigma \mid \text{die Blattbeschriftung von } t \text{ ist ein Wort aus } \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}\}$.

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Sei $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$ mit $\Sigma_0 = \{a, b\}$ und $\Sigma_2 = \{f\}$.

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen T_1 und T_2 NtdTA \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 an, so dass $T(\mathfrak{A}_1) = T_1$ und $T(\mathfrak{A}_2) = T_2$.

$$(a) T_1 = \left\{ t \in T_\Sigma \mid \begin{array}{l} \text{alle Blätter in } t \text{ sind ausschließlich mit } a\text{'s} \\ \text{oder ausschließlich mit } b\text{'s beschriftet.} \end{array} \right\}$$

$$(b) T_2 = \left\{ t \in T_\Sigma \mid \begin{array}{l} \text{es gibt zwei Blätter } u \text{ und } v \text{ von } t, u \text{ ist mit } a \text{ beschriftet,} \\ v \text{ ist mit } b \text{ beschriftet und } u \text{ liegt links von } v \end{array} \right\}$$

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Sei \mathcal{T} die Klasse der von deterministischen Top-down-Baumautomaten erkannten Sprachen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.

- (a) \mathcal{T} ist unter Schnitt abgeschlossen.
- (b) \mathcal{T} ist unter Vereinigung abgeschlossen.
- (c) \mathcal{T} ist unter Komplement abgeschlossen.