

Automatentheorie

Sommersemester 2025

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis: 23. Mai 2025, 12:45 Uhr

Aufgabe 1: (10 + 10 = 20 Punkte)

Betrachten Sie folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

- $\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und in } w \text{ kommt mind. ein } b \text{ vor.}\}$
- $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade.}\}$
- $\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt mind. ein } b \text{ vor.}\}$

(a) Geben Sie einen DFA \mathfrak{A} an mit $\mathcal{L}(\mathfrak{A}) = \mathcal{L}_1$.

(b) Definieren Sie Äquivalenzrelationen \sim_2 und \sim_3 , so dass $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_2}) = \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_3}) = \mathcal{L}_3$.

Zur Erinnerung: $|w|_a$ gibt die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a im Wort w an.

Aufgabe 2: (10 + 10 = 20 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie mit den Mitteln der Vorlesung, dass die folgenden Sprachen (über dem Alphabet $\{a, b\}$) regulär sind.

- (a) $\mathcal{L}_a := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$
- (b) $\mathcal{L}_b := (\{(aab)^n (abb)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a, b\}^* \cdot \{aaa, aabb, bbb\} \cdot \{a, b\}^*)$

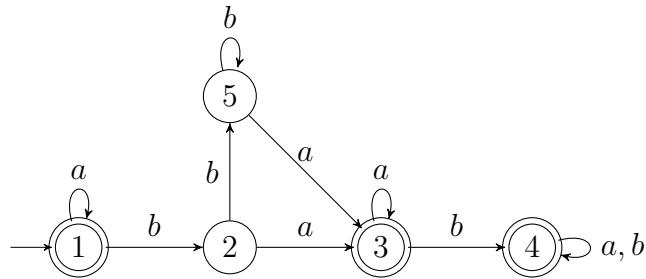
Aufgabe 3: (12 + 8 = 20 Punkte)

Betrachten Sie die Sprache $\mathcal{L} = \mathcal{L}(b(a|b)^*aa) \subseteq \{a, b\}^*$.

- (a) Geben Sie für jede $\sim_{\mathcal{L}}$ -Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an und zeigen Sie, analog zu Beispiel 2.66 aus der Vorlesung, dass für alle Paare (u, v) von Repräsentanten, gilt $u \not\sim_{\mathcal{L}} v$.
- (b) Geben Sie den kanonischen Automaten $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ an.

Aufgabe 4:

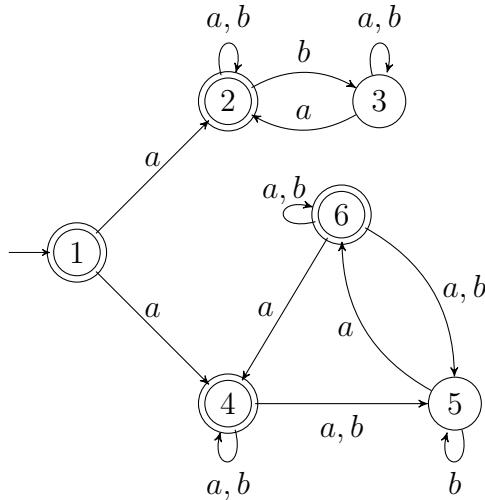
(12 + 8 = 20 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden DFA \mathfrak{A} über $\{a, b\}$:

- (a) Berechnen Sie die kanonische Kongruenz mit Hilfe des in der VL vorgestellten Algorithmus.
 (b) Geben Sie den resultierenden Quotienten-DFA $\mathfrak{A}_{/\sim_{\mathfrak{A}}}$ an.

Aufgabe 5:

(5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden NFA \mathfrak{A} über $\{a, b\}$:

Betrachten Sie die folgenden Bisimulationsspiele:

- (a) BG($\mathfrak{A}, 1, \mathfrak{A}, 6$)
 (b) BG($\mathfrak{A}, 3, \mathfrak{A}, 5$)
 (c) BG($\mathfrak{A}, 2, \mathfrak{A}, 4$)
 (d) BG($\mathfrak{A}, 4, \mathfrak{A}, 6$)

Geben Sie für jedes Spiel an, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Beschreiben Sie die Gewinnstrategie. Sie dürfen hierbei davon ausgehen, dass der gegnerische Spieler optimal spielt.