

# Automatentheorie

Sommersemester 2025

## Übungsblatt 3

**Zu bearbeiten bis:** 23. Mai 2025, 12:45 Uhr

### Aufgabe 1:

(10 + 10 = 20 Punkte)

Betrachten Sie folgende Sprachen über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  :

- $\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade und in } w \text{ kommt mind. ein } b \text{ vor.}\}$
- $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ ist gerade.}\}$
- $\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{in } w \text{ kommt mind. ein } b \text{ vor.}\}$

(a) Geben Sie einen DFA  $\mathfrak{A}$  an mit  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}) = \mathcal{L}_1$ .

(b) Definieren Sie Äquivalenzrelationen  $\sim_2$  und  $\sim_3$ , so dass  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_2}) = \mathcal{L}_2$  und  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_3}) = \mathcal{L}_3$ .

*Zur Erinnerung:*  $|w|_a$  gibt die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben  $a$  im Wort  $w$  an.

### Aufgabe 2:

(10 + 10 = 20 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie mit den Mitteln der Vorlesung, dass die folgenden Sprachen (über dem Alphabet  $\{a, b\}$ ) regulär sind.

(a)  $\mathcal{L}_a := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$

(b)  $\mathcal{L}_b := (\{(aab)^n (abb)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a, b\}^* \cdot \{aaa, aabb, bbb\} \cdot \{a, b\}^*)$

### Aufgabe 3:

(12 + 8 = 20 Punkte)

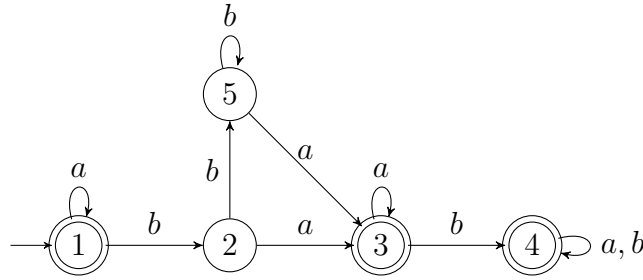
Betrachten Sie die Sprache  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(b(a|b)^*aa) \subseteq \{a, b\}^*$ .

(a) Geben Sie für jede  $\sim_{\mathcal{L}}$ -Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an und zeigen Sie, analog zu Beispiel 2.66 aus der Vorlesung, dass für alle Paare  $(u, v)$  von Repräsentanten, gilt  $u \not\sim_{\mathcal{L}} v$ .

(b) Geben Sie den kanonischen Automaten  $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$  an.

**Aufgabe 4:****(12 + 8 = 20 Punkte)**

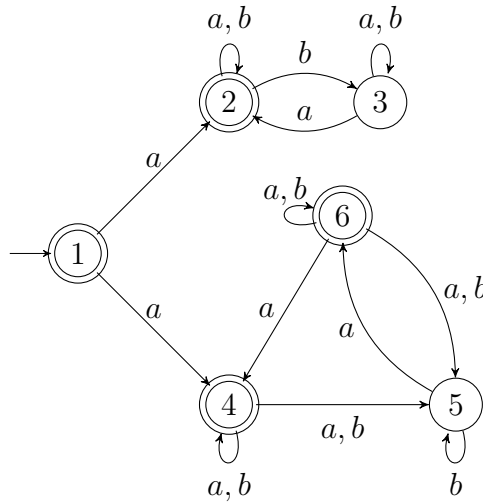
Betrachten Sie den folgenden DFA  $\mathfrak{A}$  über  $\{a, b\}$ :



- (a) Berechnen Sie die kanonische Kongruenz mit Hilfe des in der VL vorgestellten Algorithmus.  
 (b) Geben Sie den resultierenden Quotienten-DFA  $\mathfrak{A}/\sim_{\mathfrak{A}}$  an.

**Aufgabe 5:****(5 + 5 + 5 + 5 = 20 Punkte)**

Betrachten Sie den folgenden NFA  $\mathfrak{A}$  über  $\{a, b\}$ :



Betrachten Sie die folgenden Bisimulationsspiele:

- (a)  $BG(\mathfrak{A}, 1, \mathfrak{A}, 6)$  (c)  $BG(\mathfrak{A}, 2, \mathfrak{A}, 4)$   
 (b)  $BG(\mathfrak{A}, 3, \mathfrak{A}, 5)$  (d)  $BG(\mathfrak{A}, 4, \mathfrak{A}, 6)$

Geben Sie für jedes Spiel an, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Beschreiben Sie die Gewinnstrategie. Sie dürfen hierbei davon ausgehen, dass der gegnerische Spieler optimal spielt.