

Automatentheorie

Sommersemester 2025

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis: 16. Mai 2025, 12:45 Uhr

Bitte beachten Sie für die Abgabe Ihrer Lösung die Vorgaben auf unserer Webseite
<https://hu.berlin/at>.

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Sei Σ ein Alphabet. Dann existiert ein $\text{MSO}[\sigma_\Sigma]$ -Satz φ , so dass auf *allen* σ_Σ -Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A} \text{ ist eine Wortstruktur.}$$

Bemerkung: Falls die Aussage wahr ist, bedeutet dies, dass die Eigenschaft, eine Wortstruktur zu sein, MSO-definierbar ist.

Aufgabe 2:

(10 + 10 + 10 = 30 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen $\mathcal{L}_a$ und $\mathcal{L}_b$ jeweils einen $\text{MSO}[\sigma_\Sigma]$ -Satz an, der sie beschreibt.

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. $\mathcal{L}_a$ ist die Sprache, wobei für jedes Wort $w \in \mathcal{L}_a$ gilt: An der ersten und jeder k -ten Position des Wortes steht der Buchstabe a .
- (b) $\mathcal{L}_b$ ist die Sprache, wobei für jedes Wort $w \in \mathcal{L}_b$ gilt: Die Vorkommen der Buchstaben a und b wechseln sich von Wortanfang bis Wortende ab und dazwischen dürfen beliebig viele c stehen.
- (c) Welche Sprache $\mathcal{L}_c$ wird durch den unten stehenden Satz φ beschrieben?

$$\begin{aligned} \varphi = & \exists X_0 \exists X_1 \exists X_2 \left(\exists x \left(P_a(x) \wedge X_1(x) \wedge \forall y (y < x \rightarrow \neg P_a(y)) \right) \right. \\ & \wedge \exists x \left(P_a(x) \wedge X_0(x) \wedge \forall y (x < y \rightarrow \neg P_a(y)) \right) \\ & \wedge \forall x \forall y \left(P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge \forall z (x < z \wedge z < y \rightarrow \neg P_a(z)) \rightarrow \right. \\ & \left. \left. (X_0(x) \leftrightarrow X_1(y)) \wedge (X_1(x) \leftrightarrow X_2(y)) \wedge (X_2(x) \leftrightarrow X_0(y)) \right) \right) \end{aligned}$$

Welche der Sprachen ist auch FO-definierbar?¹

¹Die Aufgaben (a) und (b) stammen von M. Hofmann & M. Lange

Aufgabe 3:**(15 + 10 = 25 Punkte)**

Sei Σ ein für diese Aufgabe fest gewähltes Alphabet. Betrachten Sie folgende Entscheidungsprobleme:

- (a) Gegeben eine MSO-Formel φ , gilt für alle nicht-leeren Worte w , dass $\mathcal{A}_w \models \varphi$?
- (b) Gegeben eine MSO-Formel φ , gilt für alle nicht-leeren Worte w gerade Länge, dass $\mathcal{A}_w \models \varphi$?

Geben Sie je einen Algorithmus an, der das Problem löst.²

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

Beweisen Sie die Bemerkung nach Definition 2.61. Das heißt, zeigen Sie folgende Aussage:

Die kanonische Kongruenz ist eine Kongruenz.

²Die Aufgabe 3 & 5 stammt n.m.W. von W. Thomas.