

Automatentheorie

Sommersemester 2025

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis: bis 9. Mai 2025,

Bitte beachten Sie für die Abgabe Ihrer Lösung die Vorgaben auf unserer Webseite
<https://hu.berlin/at>.

Aufgabe 1:

(20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Eingabealphabet

$$\Sigma := \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Geben Sie einen DFA \mathfrak{A} an, der ein Wort w aus Σ^* genau dann akzeptiert, wenn w eine korrekte Addition zweier Dualzahlen $[n]_2$ und $[m]_2$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ darstellt. So ist beispielsweise $w \in L(\mathfrak{A})$ für

$$w = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \text{ weil } \begin{array}{r} 0101 = [5]_2 \\ + 0111 = [7]_2 \\ \hline 1100 = [12]_2 \end{array}.$$

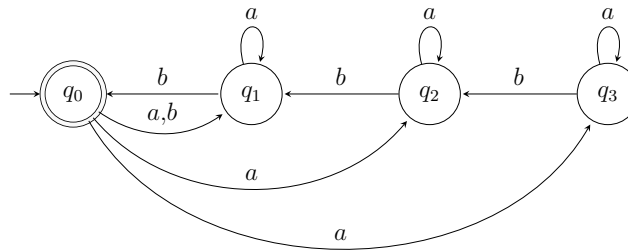
Hierbei sei $[n]_2$ die Dualzahldarstellung von n , das heißt $[n]_2 := z_l z_{l-1} \cdots z_0$, wobei $z_i \in \{0, 1\}$ für $0 \leq i \leq l$ mit $l \in \mathbb{N}$ mit $n = \sum_{i=0}^l z_i \cdot 2^i$.

Begründen sie kurz, warum die von Ihrem Automaten akzeptierte Sprache die richtige ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass ein endlicher Automat jedes Eingabewort von links nach rechts liest. Es steht Ihnen frei, ob das leere Wort ε eine korrekte Addition darstellt oder nicht.

Aufgabe 2:**(15 + 15 Punkte)**

Sei der NFA \mathfrak{A} über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ durch folgende Grafik gegeben:



- (a) Wandeln Sie den NFA \mathfrak{A} mittels Potenzmengenkonstruktion in einen äquivalenten DFA \mathfrak{B} um und dokumentieren Sie dabei nachvollziehbar die Zwischenschritte.
- (b) Geben Sie einen endlichen Automaten \mathfrak{A}' an, so dass gilt $\mathcal{L}(\mathfrak{A}') = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\mathfrak{A})$.

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Beweisen Sie die aus der Vorlesung bekannte Aussage:

Das Äquivalenzproblem für NFA's ist entscheidbar und PSPACE-vollständig.

Aufgabe 4:**(25 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Sei Σ ein Alphabet. Dann existiert ein $\text{FO}[\sigma_\Sigma]$ -Satz φ , so dass auf *allen* σ_Σ -Strukturen \mathcal{A} gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{A} \text{ ist eine Wortstruktur.}$$

Bemerkung: Falls die Aussage wahr ist, bedeutet dies, dass die Eigenschaft eine Wortstruktur zu sein, FO-definierbar ist. Ergebnisse, die aus der Vorlesung „Logik in der Informatik“ bekannt sind, können Sie hier unbewiesen verwenden. Kenntnisse aus der Übung oder anderen Veranstaltungen benötigen mindestens eine Beweisidee.