Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

8. Juli 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 15. Juli 2024, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: Sequenzen (8 + 8 + 8 = 24 Punkte)

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x, y \in \mathsf{VAR}$ mit $x \neq y$, wobei σ eine Signatur mit einem 1-stelligen Relationssymbol P sei. Zeigen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzen. Bei Angabe einer Ableitung im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ halten Sie sich bitte an das Format aus Beispiel 4.19 im Skript.

(a) $\varphi,\ (\neg\varphi \vee \psi)\ \vdash\ \psi$

(b) $\neg\neg\varphi\ \vdash\ \varphi$

(c) $P(x),\ \forall x \forall y\, x{=}y\ \vdash\ \forall y\, P(y)$

Aufgabe 2: Endlichkeitssatz (10 + 20 = 30 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Wir interpretieren σ-Strukturen als gerichtete Graphen.

Wir sagen, ein Graph ist zyklisch, falls es ein $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und Knoten $a_1, \ldots, a_\ell$ gibt, sodass (a_ℓ, a_1) und (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in [\ell - 1]$ Kanten im Graphen bilden. Ein Graph ist azyklisch, falls er nicht zyklisch ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen erststufig axiomatisierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um zu zeigen, dass die Klasse aller zyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen *nicht* erststufig axiomatisierbar ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: Skolemform (24 Punkte)

Sei $\sigma := \{R, f\}$, wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Transformieren Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(z) \;:=\; \exists x \Big(\forall y \; R(x,y) \;\vee\; f(x) = z \Big)$$

in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten, gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform. Hierbei seien die Variablen x, y und z paarweise verschieden, das heißt $|\{x, y, z\}| = 3$.

Gehen Sie bei der Transformation wie im Beweis von Satz 4.52 im Vorlesungsskript vor. Geben Sie insbesondere auch die Formel an, die nach jedem der Schritte 1, 2 und 3 des Beweises entsteht.

Aufgabe 4: Herbrandstrukturen (22 Punkte)

Sei $\sigma := \{R, f, c\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol R, dem 1-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c. Betrachten Sie den folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ:

$$\forall x \forall y \forall z \left(R(x, f(x)) \;\wedge\; \Big(\Big(R(x,y) \wedge R(y,z) \Big) \;\rightarrow\; R(x,z) \Big) \right)$$

Geben Sie σ-Herbrandstrukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, sodass gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi.$$

Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{A} \models \varphi$ bzw. $\mathcal{B} \not\models \varphi$ gilt.