Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

1. Juli 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

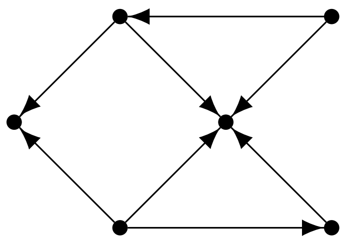
Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 8. Juli 2024, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

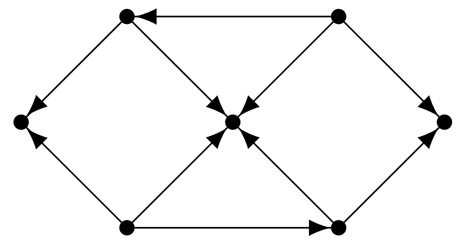
Aufgabe 1: Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Betrachten Sie die folgenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden EF-Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$-Runden EF-Spiel beschreiben.

(b) Geben Sie für Ihr m aus **(a)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, für den gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi$$

Begründen Sie, warum φ das Gewünschte leistet.

Aufgabe 2: Logische Reduktion (25 Punkte)

Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Wir betrachten die Signatur $\sigma = \{E\}$ für gerichtete Graphen (d.h. E ist ein 2-stelliges Relationssymbol). Sei BIPART die Klasse aller gerichteten, bipartiten Graphen, d.h. aller σ-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

> Es gibt eine Teilmenge $L \subseteq V$, sodass für alle Kanten $(a, b) \in E^{\mathcal{A}}$ gilt:
> $a \in L \iff b \notin L$.

Zeigen Sie: Die Klasse BIPART ist *nicht FO-definierbar*.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: Kalkül (25 Punkte)

(a) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Betrachten Sie das Alphabet $A = A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ und die Menge $M := A^*$. Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge M an, so dass gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{FO}[\sigma]$.

(b) Betrachten Sie das Alphabet $A = \{\mathsf{m}, \mathsf{i}, \mathsf{u}\}$ und die Menge $M := A^*$.

Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül über M, der genau die folgenden Regeln für alle $v, w \in M$ enthält:

$$\frac{}{\mathsf{mi}} \qquad\qquad \frac{\mathsf{m}w}{\mathsf{m}ww} \qquad\qquad \frac{v\mathsf{iii}w}{v\mathsf{u}w} \qquad\qquad \frac{v\mathsf{uu}w}{vw}$$

(i) Geben Sie eine rekursive Definition der Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$ an.

(ii) Welche der folgenden Worte $w_1, w_2, w_3 \in M$ sind aus $\mathfrak{K}$ ableitbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

$$w_1 = \mathsf{miiii} \qquad\qquad w_2 = \mathsf{miiuu} \qquad\qquad w_3 = \mathsf{mu}$$

Aufgabe 4: Sequenzenkalkül (25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, sei $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und seien $x, y \in \mathsf{VAR}$.

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregeln:

(a) $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma, \varphi & \vdash \chi \\ \Gamma, \psi & \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

(b) $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \qquad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$