Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Juni 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 24. Juni 2024, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: formale Sprachen (20 Punkte)

Sei $\Sigma := \{\mathsf{m}, \mathsf{i}\}$ und sei $\sigma_\Sigma := \{\leqslant, P_\mathsf{m}, P_\mathsf{i}\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur von Wortstrukturen über dem Alphabet Σ.

Definition: Ein $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \ := \ \forall x \Big(P_\mathsf{i}(x) \ \rightarrow \ \exists y \Big(P_\mathsf{m}(y) \ \wedge \ x \leqslant y \ \wedge \ \forall z \big((x \leqslant z \ \wedge \ z \leqslant y) \rightarrow (z = x \vee z = y) \big) \Big) \Big)$$

Sie können die Sprache durch eine rekursive Definition, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

(b) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz an, der die wie folgt rekursiv definierte Sprache L beschreibt und begründen Sie, warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

Rekursionsanfang $\mathsf{mi} \in L$

Rekursionsschritt Ist $w \in L$, so ist auch $w\mathsf{mi} \in L$.

Aufgabe 2: Logik und Datenbanken (20 Punkte)

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung (Skript, Abschnitt 3.6).

(a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel φ und ein Variablentupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ an, die die Anfrage beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{D}}$.

- **(i)** Geben Sie alle Kinos und deren Adresse aus, in denen um '20:00' ein Film beginnt.
- **(ii)** Geben Sie Titel und Regisseur aller Filme aus, die in genau einem Kino laufen.

(b) Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formeln φ_1 und φ_2 beschrieben werden.

- **(i)** $\varphi_1(x) \ := \ \exists x_Z \, R_{Prog}(x, \text{'Alien'}, x_Z)$
- **(ii)** $\varphi_2(x_1, x_2) \ := \ \big(R_{Prog}(\text{'Babylon'}, x_1, x_2) \wedge \neg \exists x_Z \ R_{Prog}(\text{'Kino International'}, x_1, x_Z) \big)$

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: Äquivalenzen **(30 Punkte)**

(a) Sei die Signatur $\sigma := \{E, f\}$. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\forall x\, \exists y\ E(x,y) \ \equiv\ \exists y\, \forall x\ E(x,y)$

(ii) $\forall x\, \forall y\, \big(f(x){=}y \ \rightarrow\ f(y){=}x\big) \ \equiv\ \forall y\, \forall x\, \big(\neg f(y){=}x \ \rightarrow\ \neg f(x){=}y\big)$

(iii) $\forall x\, \exists y\ f(x){=}y \ \equiv\ \forall x\, \exists y\, \Big(\big(x{=}y \vee E(x,y)\big) \rightarrow \exists z\, \big(z{=}y \vee E(z,y)\big)\Big)$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind für alle Signaturen σ und alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $(\forall x\, \varphi \ \wedge\ \forall x\, \psi) \ \equiv\ \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$

(ii) $(\forall x\, \varphi \ \vee\ \forall x\, \psi) \ \equiv\ \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

(iii) $(\exists x\, \varphi \ \wedge\ \exists x\, \psi) \ \equiv\ \exists x\, (\varphi \wedge \psi)$

(iv) $(\exists x\, \varphi \ \vee\ \exists x\, \psi) \ \equiv\ \exists x\, (\varphi \vee \psi)$

(c) Beweisen Sie, dass ihre Antworten zu **(i)** und **(iii)** in Aufgabenteil **(b)** korrekt sind.

Aufgabe 4: Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele **(30 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Betrachten Sie die folgenden, gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

Für

$$\varphi \ :=\ \exists x \exists y \forall z\, \big(\, E(z,x) \ \vee\ E(z,y)\,\big)$$

gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

(a) Leiten Sie aus dem $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ eine Gewinnstrategie für Spoiler im EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ her. Geben Sie an, wie viele Runden Spoiler benötigt, wenn er dieser Strategie folgt. Beschreiben Sie die Strategie ähnlich wie in der im Vorlesungsskript beschriebenen Beweisidee zu Satz 3.51.

(b) Existiert eine bessere Gewinnstrategie für Spoiler? D.h. gibt es eine Strategie, mit der er in weniger Runden das Spiel gewinnt? Wenn ja, dann beschreiben Sie eine solche Strategie. Wenn nein, dann begründen Sie dieses.