Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. Juni 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 17. Juni 2024, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

allgemeiner Hinweis: Wenn Sie in Ihren Lösungen größere FO*-Formeln angeben, sollten Sie diese in kleinere Subformeln unterteilen und erläutern, was die einzelne Subformeln bedeuten bzw. leisten sollen. Hierfür können Sie die Formel über mehrere Zeilen schreiben und jede Zeile kommentieren oder Bezeichner für die Subformeln einführen (siehe z.B. Skript Beispiel 3.32).*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{h, i, m, o, p, r, s, u\}$.

(a) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := \textit{isomorphismus} \in \Sigma^*$ an.

(b) Sei $\mathcal{B}$ die σ_Σ-Struktur mit dem Universum $B := [14]$, in der $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[14]$ ist und $P_h^{\mathcal{B}} := \{1, 9\}$, $P_i^{\mathcal{B}} := \{10\}$, $P_m^{\mathcal{B}} := \{3, 5, 12\}$, $P_o^{\mathcal{B}} := \{2, 4, 6\}$, $P_p^{\mathcal{B}} := \{8\}$, $P_r^{\mathcal{B}} := \{7\}$, $P_s^{\mathcal{B}} := \{11, 14\}$ und $P_u^{\mathcal{B}} := \{13\}$. Welches Wort $w' \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{B}$ repräsentiert?

Aufgabe 2: Koinzidenzlemma für FO-Formeln (30 Punkte)

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28). Sie dürfen dafür das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) benutzen. *Zur Erinnerung*:

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)**.** *Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien.*

Sei $\varphi \in \mathsf{FO}$ eine Formel der Logik erster Stufe mit $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} = \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$, *und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, *für alle* $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$.

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Hinweis: Für den Beweis dürfen Sie die in Lemma 3.43 und Lemma 3.44 bewiesenen Äquivalenzen verwenden.

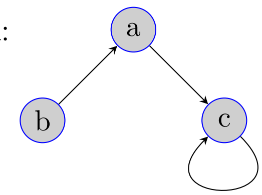
— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E.

(a) Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$, die durch den gerichteten Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird. Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, der die Struktur eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:

$\mathcal{A}$:



$$\mathcal{B} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

Erläutern Sie Ihren $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ.

(b) Betrachten Sie die σ-Struktur $\mathcal{A}$ aus dem Aufgabenteil **(a)** und die Formel

$$\psi(x) = \forall y \Big(E(x,y) \to E(y,y) \Big).$$

Geben Sie zwei Belegungen β_1 und β_2 in $\mathcal{A}$ an, sodass für die Interpretationen $\mathcal{I}_1 := (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 := (\mathcal{A}, \beta_2)$ gilt:

$$\mathcal{I}_1 \models \psi \qquad \text{und} \qquad \mathcal{I}_2 \not\models \psi.$$

Begründen Sie, warum Ihre Belegungen das Gewünschte leisten.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$ und $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ das Standardmodell der Arithmetik (siehe Skript Seite 110).

(a) Geben Sie eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ_1 an, die in $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ folgende intuitive Bedeutung hat:

Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(b) Geben Sie eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ_2 an, die in $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ folgende intuitive Bedeutung hat:

Es gibt unendlich viele Sophie-Germain-Primzahlen, d.h. Primzahlen p, sodass $2p + 1$ auch eine Primzahl ist.

(c) Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\varphi_3(x)$ und beschreiben Sie, was φ_3 im Standardmodell der Arithmetik aussagt.

$$\varphi_3(x) := \underline{1} + \underline{1} < x \wedge \forall y \left(\Big(\varphi_{\text{prim}}(y) \wedge \varphi_{|}(y,x) \Big) \;\to\; y{=}(\underline{1}{+}\underline{1}) + \underline{1} \right)$$

Hierbei sind $\varphi_|$ und φ_{prim} so wie im Skript Seite 142f definiert.