Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Juni 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 10. Juni 2024, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (40 Punkte)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Hornformel.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Jede aussagenlogische Formel ist erfüllbarkeitsäquivalent zu einer Hornformel.

(c) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi := \neg A \land (\mathbf{0} \to C) \land (C \lor \neg A) \land ((B \land A) \to D) \land ((E \land B \land C) \to \mathbf{0}) \land (\mathbf{1} \to B)$$

(d) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma := \Big\{ \{P, \neg T\}, \{T\}, \{\neg U, \neg T, \neg P\}, \{\neg T, U, \neg P\}, \{\neg U, \neg T, \neg R\}, \{Q, \neg T\} \Big\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.65 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, c\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $c^{\mathcal{A}} := \text{Spock}$. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(a, b)$ für $a, b \in A$ findet sich in Zeile a und Spalte b der nebenstehenden Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein},\ \beta(v_1) = \text{Spock},\ \beta(v_2) = \text{Schere},\ \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie in nachvollziehbaren Schritten $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme.

(a) $t_1 := f(c, v_1)$

(b) $t_2 := f(f(c, v_0), f(v_2, v_1))$

(c) $t_3 := f(c, f(f(v_6, v_7), f(v_2, c)))$

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

Sei $\sigma = \{f, R, S, c$ die Signatur mit dem 1-stelligen Funktionssymbol f, dem 2-stelligen Relationssymbol R, dem 3-stelligen Relationssymbol S und dem Konstantensymbol c.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel und/oder um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort keinen σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel darstellt.

(i) $(v_1 \vee v_2)$

(ii) $R\big(f(v_2), c\big)$

(iii) $\big(f(v_9) \vee R(v_9, v_9)\big)$

(iv) $\exists v_7 \neg\, f\Big(f(f(f(v_7)))\Big){=}f(v_7)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q, q), (r, t), (t, r), (u, q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q, s, q), (u, t, r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(1, 5), (2, 4), (4, 4), (5, 1)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2, 5, 1), (4, 3, 4)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(v, x), (w, z), (x, x), (z, w)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v, z, w), (x, v, x)\}$, $c^{\mathcal{C}} := y$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}}\colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}}\colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}}\colon C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	3	4	5	5	2

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	x	y	z	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und zeigen Sie, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, zeigen Sie, dass es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.