Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Mai 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 4

Abgabe: *27. Mai 2024*

Aufgabe 1: (40 Punkte)

Wandeln Sie die folgende Formel mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in KNF um.

$$\varphi := \Big(\big((C \wedge D) \rightarrow \neg E\big) \wedge \neg(A \vee \neg D)\Big)$$

Hinweis zur Erleichterung der Korrektur:
Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.52. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln von φ erhalten aufsteigend Bezeichner der Form ψ_i, wobei $i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ (φ erhält keinen zusätzlichen Bezeichner).
- Negierte Aussagensymbole und φ bilden hier keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Der Index i entspricht der Position der Subformeln in der Traversierung des Syntaxbaumes von φ nach der pre-order Tiefensuche. Eine solche Traversierung listet zunächst die Wurzel des Baumes auf, dann die Traversierung des kompletten linken Teilbaumes (so dieser existiert) und dann die des rechten Teilbaumes (so dieser existiert).
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht oder nur teilweise korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\mathit{Kinder}(v)$ endlich ist.

(a) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ von Knoten aus V, so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \mathit{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ *repräsentiert einen Pfad* $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \mathsf{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad v \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage *„Der Knoten v gehört zum Pfad P"*.

Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

(b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$ hat die Länge n. Wir sagen dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält.

Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes Kőnig (1936):

Kőnigs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

(a) Stellen Sie für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \quad := \quad \Big\{ \{Q, S\},\ \{\neg Q, \neg S\},\ \{S, \neg R\},\ \{\neg S, R\},\ \{\neg Q, \neg R\} \Big\}$$

eine aussagenlogische Formel φ_1 in KNF auf, sodass für jede Interpretation gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \Gamma_1$$

(b) Geben Sie für jede der folgenden Klauselmengen jeweils eine erfüllende Interpretation oder eine Resolutionswiderlegung an.

$$\Gamma_2 \quad := \quad \Big\{ \{A, \neg C\},\ \{A, C\},\ \{A, \neg B\},\ \{\neg A, B, C\},\ \{\neg A, B, \neg C\} \Big\}$$

$$\Gamma_3 \quad := \quad \{ \{A, \neg C\},\ \{A, C\},\ \{\neg A, \neg B\},\ \{\neg A, B, C\},\ \{\neg A, B, \neg C\} \}$$

Hierbei seien A, B und C unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.58 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.