Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. Mai 2024

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 20. Mai 2022, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Finden Sie für jede der Mengen

(a) $\tau_1 := \{\to, \mathbf{1}\}$ und

(b) $\tau_2 := \{\neg, \to\}$

heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.33). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Betrachten Sie die Formel

$$\varphi := \Big(A_3 \to \big((A_2 \wedge (\neg A_0 \vee A_1)) \wedge A_4\big)\Big)$$

(a) Wandeln Sie die Formel φ jeweils in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und φ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu analog zu Beispiel 2.43 vor. Das heißt, erzeugen Sie φ_{DNF} und φ_{KNF} aus φ mittels Äquivalenzumformungen.

(b) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie Sie vorgehen *würden*, um φ unter Verwendung einer Wahrheitstafel jeweils in eine äquivalente Formel φ'_{DNF} in DNF und φ'_{KNF} in KNF umzuwandeln. Warum wäre dieses Verfahren für das konkrete φ nicht ratsam?

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(50 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.45 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(a) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ existiert eine Interpretation, die sich von $\mathcal{I}$ nur dadurch unterscheidet, dass sie *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(b) Beweisen Sie Satz 2.45 aus der Vorlesung. *Zur Erinnerung*:

Satz 2.45. *Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, seien $X_1,\dots,X_n$ und $Y_1,\dots,Y_n$ genau $2n$ verschiedene Aussagensymbole und sei*

$$\varphi_n \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n} (\, X_i \vee \neg Y_i \,)\,.$$

Jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF hat mindestens 2^n konjunktive Klauseln.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1,\dots,\kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(a)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1,\dots,\kappa_N$ von mindestens zwei essentiell verschiedenen Interpretationen $\mathcal{I}$ aus **(a)** erfüllt wird. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ und Formeln φ'_n von DNF-Formeln mit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, sodass

- $0 < |\varphi'_{n+1}| - |\varphi'_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt
  (d.h. φ'_{n+1} ist länger als φ'_n, aber höchstens um c Zeichen), und
- jede zu φ'_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat?

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.