

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

Übungsblatt 1

Abgabe: bis 29. April 2024, 10.00 Uhr über Moodle

Notieren Sie bitte ganz oben auf Ihrer Abgabe die Daten **aller** Personen Ihrer Kleingruppe. So könnte der Kopf Ihrer Abgabe aussehen:

Blatt Nr. X Max Mustermann, Matr.Nr. 0101010
 Sabine Musterfrau Matr.Nr. 1001001

Jede Person erhält nur Punkte für diejenigen Abgaben, auf denen ihr Name angegeben ist. Sich in die Abgabegruppe in Moodle einzutragen ist **nicht** ausreichend.

Aufgabe 1: Rezept-Amnesie

(50 Punkte)

Verzweifelt steht der Pionier vor dem Manufaktor, den er soeben auf der fremden Welt von Massage-2(A-B)b platziert hat. Der Manufaktor sollte eigentlich einen besseren Treibstoff für die Kohlegeneratoren herstellen, aber der Pionier weiß nicht mehr, welche der Erze **Caterium**, **Eisen**, **Kupfer** und **Uran** dafür benötigt werden. Eifrig schlägt er im Ficsit-Ratgeber nach. Diesem zufolge sind die folgenden Regeln einzuhalten:

Regel 1: Der Manufaktor verwendet **Kupfererz** oder **Cateriumerz** oder wenigstens **Eisenerz**.

Regel 2: Falls **Eisenerz** verwendet wird, wird auch **Kupfer-** oder **Cateriumerz** verwendet – auf keinen Fall braucht man dann aber **Uranerz**.

Regel 3: **Kupfer-** und **Cateriumerz** können nur dann zusammen genutzt werden, wenn auch **Uranerz** verwendet wird.

Regel 4: **Caterium** wird immer dann verwendet, wenn **Eisen-** oder **Kupfererz** verwendet wird.

- (a) Übersetzen Sie die obigen vier Regeln in aussagenlogische Formeln φ_1 , φ_2 , φ_3 und φ_4 , welche den Inhalt der jeweiligen Regel widerspiegeln. Benutzen Sie dafür die Aussagensymbole C , E , K , und U mit der Bedeutung, dass der Manufaktor **Cateriumerz**, **Eisenerz**, **Kupfererz** oder **Uranerz** verwendet.
- (b) Konstruieren Sie eine Formel φ , die nur die Aussagensymbole C , E , K und U benutzt und ausdrückt, dass alle vier Regeln eingehalten werden müssen.
- (c) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel φ auf.
- (d) Ein Warnhinweis im Ficsit-Ratgeber macht auf die Gefahren beim Umgang mit **Uranerz** aufmerksam. Es wäre also gut, wenn man auf dieses verzichten könnte. Geben Sie daher eine erfüllende Interpretation \mathcal{I} der Formel φ an, für die $\mathcal{I}(U) = 0$ gilt, oder zeigen Sie, dass keine solche Interpretation existiert.

- (e) Um seine Effektivitätsquote zu halten will der Pionier möglichst wenig Erze zum Manufaktur bringen müssen. Geben Sie eine Interpretation \mathcal{I}_m an, bei der die Anzahl der mit wahr interpretierten Aussagensymbole minimal ist. Zeigen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.

Aufgabe 2:

(50 Punkte)

- (a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i) $\varphi_1 := (A_0 \vee A_1)$

(ii) $\varphi_2 := ((A_0 \rightarrow A_1) \wedge (A_0 \wedge \neg A_1))$

(iii) $\varphi_3 := ((\mathbf{1} \rightarrow (\neg A_0 \wedge A_0)) \leftrightarrow \mathbf{0})$

(iv) $\varphi_4 := (((A_0 \rightarrow A_1) \wedge (A_1 \rightarrow A_2)) \wedge (A_2 \rightarrow A_0))$

- (b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil (a) definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$, $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_{36})$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$. Begründen Sie, warum $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

- (d) Beweisen Sie, dass für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \text{AL}$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in \text{AL}$ gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models (\varphi \rightarrow \psi)$$