

# Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2024

## Übungsblatt 1

**Abgabe:** bis 29. April 2024, 10.00 Uhr über Moodle

Notieren Sie bitte ganz oben auf Ihrer Abgabe die Daten **aller** Personen Ihrer Kleingruppe. So könnte der Kopf Ihrer Abgabe aussehen:

Blatt Nr. X Max Mustermann, Matr.Nr. 0101010  
Sabine Musterfrau Matr.Nr. 1001001

Jede Person erhält nur Punkte für diejenigen Abgaben, auf denen ihr Name angegeben ist. Sich in die Abgabegruppe in Moodle einzutragen ist **nicht** ausreichend.

### Aufgabe 1: Rezept-Amnesie

(50 Punkte)

Verzweifelt steht der Pionier vor dem Manufaktor, den er soeben auf der fremden Welt von Massage-2(A-B)b platziert hat. Der Manufaktor sollte eigentlich einen besseren Treibstoff für die Kohlegeneratoren herstellen, aber der Pionier weiß nicht mehr, welche der Erze Caterium, Eisen, Kupfer und Uran dafür benötigt werden. Eifrig schlägt er im Ficsit-Ratgeber nach. Diesem zufolge sind die folgenden Regeln einzuhalten:

**Regel 1:** Der Manufaktor verwendet Kupfererz oder Cateriumerz oder wenigstens Eisenerz.

**Regel 2:** Falls Eisenerz verwendet wird, wird auch Kupfer- oder Cateriumerz verwendet – auf keinen Fall braucht man dann aber Uranerz.

**Regel 3:** Kupfer- und Cateriumerz können nur dann zusammen genutzt werden, wenn auch Uranerz verwendet wird.

**Regel 4:** Caterium wird immer dann verwendet, wenn Eisen- oder Kupfererz verwendet wird.

- Übersetzen Sie die obigen vier Regeln in aussagenlogische Formeln  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$ , welche den Inhalt der jeweiligen Regel widerspiegeln. Benutzen Sie dafür die Aussagensymbole  $C$ ,  $E$ ,  $K$ , und  $U$  mit der Bedeutung, dass der Manufaktor Cateriumerz, Eisenerz, Kupfererz oder Uranerz verwendet.
- Konstruieren Sie eine Formel  $\varphi$ , die nur die Aussagensymbole  $C$ ,  $E$ ,  $K$  und  $U$  benutzt und ausdrückt, dass alle vier Regeln eingehalten werden müssen.
- Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel  $\varphi$  auf.
- Ein Warnhinweis im Ficsit-Ratgeber macht auf die Gefahren beim Umgang mit Uranerz aufmerksam. Es wäre also gut, wenn man auf dieses verzichten könnte. Geben Sie daher eine erfüllende Interpretation  $\mathcal{I}$  der Formel  $\varphi$  an, für die  $\mathcal{I}(U) = 0$  gilt, oder zeigen Sie, dass keine solche Interpretation existiert.

- (e) Um seine Effektivitätsquote zu halten will der Pionier möglichst wenig Erze zum Manufaktur bringen müssen. Geben Sie eine Interpretation  $\mathcal{I}_m$  an, bei der die Anzahl der mit wahr interpretierten Aussagensymbole minimal ist. Zeigen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.

## Aufgabe 2:

(50 Punkte)

- (a) Geben Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

(i)  $\varphi_1 := (A_0 \vee A_1)$

(ii)  $\varphi_2 := ((A_0 \rightarrow A_1) \wedge (A_0 \wedge \neg A_1))$

(iii)  $\varphi_3 := ((\mathbf{1} \rightarrow (\neg A_0 \wedge A_0)) \leftrightarrow \mathbf{0})$

(iv)  $\varphi_4 := (((A_0 \rightarrow A_1) \wedge (A_1 \rightarrow A_2)) \wedge (A_2 \rightarrow A_0))$

- (b) Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  wie in Aufgabenteil (a) definiert und sei  $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ . Gilt nun, dass  $\Phi \models \varphi_3$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (c) Eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$  gibt mit  $n = m^2$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei die aussagenlogische Formel  $\varphi_n$  definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

und  $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Es ist also beispielsweise  $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$ ,  $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$ ,  $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$ ,  $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$ ,  $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$ ,  $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$  und  $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_{36})$ .

Geben Sie eine Interpretation  $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  an, so dass gilt:  $\mathcal{I} \models \Phi$ . Begründen Sie, warum  $\mathcal{I} \models \Phi$  gilt.

- (d) Beweisen Sie, dass für alle Formelmengen  $\Phi \subseteq \text{AL}$  und alle Formeln  $\varphi, \psi \in \text{AL}$  gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models (\varphi \rightarrow \psi)$$