Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

8. Mai 2024

Automatentheorie

Sommersemester 2024

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis: *17. Mai 2024, 13:00 Uhr*

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

> Sei Σ ein Alphabet. Dann existiert ein MSO$[\sigma_\Sigma]$-Satz φ, so dass auf *allen* σ_Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:
> $$\mathcal{A} \models \varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \text{ ist eine Wortstruktur.}$$

*B*emerkung: Falls die Aussage wahr ist, bedeutet dies, dass die Eigenschaft eine Wortstruktur zu sein, MSO-definierbar ist.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie für die folgenden Sprachen eine MSO$[\sigma_\Sigma]$-Formel an, die sie beschreibt.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. $\mathcal{L}_a$ ist die Sprache, wobei für jedes Wort $w \in \mathcal{L}_a$ gilt: An der ersten und jeder k-ten Position des Wortes steht der Buchstabe a.

(b) $\mathcal{L}_b$ ist die Sprache, wobei für jedes Wort $w \in \mathcal{L}_b$ gilt: Die Vorkommen der Buchstaben a und b wechseln sich von Wortanfang bis Wortende ab und dazwischen dürfen beliebig viele c stehen.

Welche der Sprachen ist auch FO-definierbar?[1]

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei Σ ein für diese Aufgabe fest gewähltes Alphabet. Betrachten Sie folgende Entscheidungsprobleme:

(a) Gegeben eine MSO-Formel φ, gilt für alle nicht-leeren Worte w, dass $\mathcal{A}_w \models \varphi$?

(b) Gegeben eine MSO-Formel φ, gilt für alle nicht-leeren Worte w gerade Länge, dass $\mathcal{A}_w \models \varphi$?

Geben Sie je einen Algorithmus an, der das Problem löst.[2]

---

[1]Die Aufgabe stammt von M. Hofmann & M. Lange

[2]Die Aufgabe 3 & 5 stammt n.m.W. von W. Thomas.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**
Beweisen Sie die Bemerkung nach Def. 2.61. D.h. zeigen Sie folgende Aussage:

Die kanonische Kongruenz ist eine Kongruenz.

Aufgabe 5: **(20 Punkte)**
Betrachten Sie folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

- $\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* |\ \ |w|_a$ ist gerade und in w kommt mind. ein b vor. $\}$
- $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* |\ \ |w|_a$ ist gerade. $\}$
- $\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* |$ in w kommt mind. ein b vor. $\}$

(a) Geben Sie einen DFA $\mathfrak{A}$ an mit $\mathcal{L}(\mathfrak{A}) = \mathcal{L}_1$.

(b) Definieren Sie Äquivalenzrelationen $\sim_2$ und $\sim_3$, so dass $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_2}) = \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}(\mathfrak{A}_{/\sim_3}) = \mathcal{L}_3$.

Zur Erinnerung: $|w|_a$ gibt die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben a im Wort w an.