Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

18. Juni 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 6

zu bearbeiten bis: *25. Juni 2024, 09.15 Uhr*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$ die Signatur mit zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h. Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k \times \ell)$-Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $[k] \times [\ell]$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j)\,,\ (i{+}1,j) \big) \ : \ 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\} \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j)\,,\ (i,j{+}1) \big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \Big\} \end{aligned}$$

Sei *Diag* die 1-stellige Anfrage, die jedem Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ (für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$) die Diagonale

$$\mathit{Diag}(\mathcal{G}_{k,\ell}) \quad := \quad \{(i,i) : 1 \leqslant i \leqslant \min(k,\ell)\}$$

zuordnet. Ist diese Anfrage FO+MOD-definierbar in der Klasse $\mathsf{S} := \{\mathcal{G}_{k,\ell} \ : \ k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Anfrage Q gilt:

$$Q \text{ ist FO+MOD-definierbar auf } \mathsf{S} \quad \Longrightarrow \quad Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathsf{S} \text{ bzgl. FO+MOD}.$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Anfrage Q:

$$Q \text{ ist Gaifman-lokal auf } \mathsf{S} \text{ bzgl. FO+MOD} \quad \Longrightarrow \quad Q \text{ ist FO+MOD-definierbar auf } \mathsf{S}\ ?$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$ mit $\mathrm{ar}(E) = 2$. Wir definieren die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln $\mathit{enc}_h(x)$ für alle $h \in \mathbb{N}$ wie folgt: $\mathit{enc}_0(x) := \neg\exists y\, E(x,y)$, und für alle $h \geqslant 1$ sei $\mathit{enc}_h(x) :=$

$$\forall y \Big(E(x,y) \to \mathit{enc}_{h-1}(y) \Big) \quad \wedge \quad \forall y \forall y' \Big(\big(E(x,y) \wedge E(x,y') \wedge \neg\, y{=}y' \big) \to \neg \mathit{eq}_{h-1}(y,y') \Big)$$

Geben Sie eine präzise Beschreibung dafür an, was diese Formel genau besagt (analog zur Formulierung von Lemma 4.5), und geben Sie eine möglichst dichte obere Schranke (im Sinne der O-Notation) für die Länge der Formel $\mathit{enc}_h(x)$ in Abhängigkeit von h an und beweisen Sie, dass dies tatsächlich eine obere Schranke ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **$(5+8+1+8+8=30$ Punkte)**

Geben Sie für jedes $h \in \mathbb{N}$ möglichst kurze $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln $bit_h(x,y)$, $less_h(x,y)$, $min_h(x)$, $succ_h(x,y)$, $max_h(x)$ an, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt: Falls es $m,n \in \{0,\ldots,\mathrm{Tower}(h){-}1\}$ mit $\mathcal{A}_a \cong \mathcal{T}(m)$ und $\mathcal{A}_b \cong \mathcal{T}(n)$ gibt, so gilt:

(a) $\mathcal{A} \models bit_h[a,b] \iff \mathrm{Bit}(m,n)=1$

(b) $\mathcal{A} \models less_h[a,b] \iff m<n$

(c) $\mathcal{A} \models min_h[a] \iff m=0$

(d) $\mathcal{A} \models succ_h[a,b] \iff m{+}1=n$

(e) $\mathcal{A} \models max_h[a] \iff m=\mathrm{Tower}(h){-}1$