Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

4. Juni 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 5

zu bearbeiten bis: *11. Juni 2024, 09.*^{15} *Uhr*

Aufgabe 1: (33 Punkte)

Lösen Sie die am Ende von Kapitel 1 auf Seite 1.58 angegebene Übungsaufgabe. D.h.:

Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ sei $\|G\| := |V| + |E|$.

Finden Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe eines beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ (von beliebigem Grad) nach $O(\|G\| \cdot \log\|G\|)$ Vorverarbeitungszeit mit konstanter Taktung die Menge $V^2 \setminus E = [\![\neg E(z_1, z_2)]\!]^{\mathcal{G}}$ ausgibt.

Begründen Sie auch, warum Ihr Algorithmus korrekt ist und warum er die gewünschten Laufzeit-Garantien einhält.

Aufgabe 2: (34 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 2.6. Zur Erinnerung:

Korollar 2.6. Sei $\mathsf{L} \in \{\mathsf{FO}, \mathsf{FO{+}MOD}\}$. Sei σ eine Signatur. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, seien $x_1, \ldots, x_k, y$ $k{+}1$ verschiedene Variablen, und sei $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$.

Bei Eingabe einer Zahl $r \in \mathbb{N}$ und einer r-lokalen $\mathsf{L}[\sigma]$-Formel $\lambda(\bar{x}, y)$ mit $\text{frei}(\lambda) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k, y\}$ kann eine endliche, nicht-leere Menge Δ' von Paaren $(\alpha'(\bar{x}), \beta'(y))$ von r-lokalen $\mathsf{L}[\sigma]$-Formeln berechnet werden, sodass gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \text{dist}(x_i, y) > 2r{+}1 \;\; \wedge \;\; \lambda(\bar{x}, y) \quad \equiv \quad \bigwedge_{i=1}^{k} \text{dist}(x_i, y) > 2r{+}1 \;\; \wedge \bigvee_{(\alpha', \beta') \in \Delta'} (\alpha'(\bar{x}) \wedge \beta'(y)) \,.$$

Aufgabe 3: (33 Punkte)

Stellen Sie für jede der beiden folgenden Formeln fest, ob sie in Gaifman-Normalform ist und geben Sie gegebenenfalls eine dazu äquivalente Formel in Gaifman-Normalform an. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $\varphi_1(x) \;:=\; \forall y\, E(x, y)$

(b) $\varphi_2(x_1, x_2) \;:=\; \neg x_1{=}x_2 \;\wedge\; \forall y\, (\, E(x_1, y) \vee E(x_2, y)\,)$