Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. Mai 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 4

zu bearbeiten bis: *4. Juni 2024, 09.[15] Uhr*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Sei C die Klasse aller endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$, für die gilt: die Zahl $|A| + |E^{\mathcal{A}}|$ ist eine Primzahl. Ist C Hanf-lokal in der Klasse S aller endlichen gerichteten Graphen?
Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2: (40 Punkte)

Betrachten Sie die Beweisidee für Behauptung 2 auf den Seiten 1.44 und 1.45 der handschriftlichen Notizen. Arbeiten Sie im Detail aus, wie $E^{\mathcal{G}}$ in Zeit $O(|A|)$ berechnet werden kann.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist, Theorem 1.18 (siehe Seite 1.33 der handschriftlichen Notizen) um eine "dynamische Komponente" zu erweitern. Wir halten eine Gradschranke $d \geqslant 2$ und eine Signatur σ fest und betrachten die folgenden Update-Operationen:

Für $R \in \sigma$, $r = \text{ar}(R)$ und beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_r$ (diese müssen nicht unbedingt zum Universum der aktuellen Struktur gehören) bewirkt die Update-Operation

- $U :=$ `delete` $R(a_1, \ldots, a_r)$
  dass das Tupel $(a_1, \ldots, a_r)$ aus der Relation R gelöscht wird (falls es dort gar nicht enthalten war, ändert sich nichts). D.h.: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so ist $U(\mathcal{A})$ die σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit Universum $B = A$ und $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \setminus \{(a_1, \ldots, a_r)\}$ und $S^{\mathcal{B}} = S^{\mathcal{A}}$ für alle $S \in \sigma \setminus \{R\}$.
- $U :=$ `insert` $R(a_1, \ldots, a_r)$
  dass das Tupel $(a_1, \ldots, a_r)$ in die Relation R eingefügt wird (falls es dort bereits enthalten war, ändert sich nichts); falls jedoch durch das Einfügen der Grad der Struktur $> d$ wird, bleibt die Struktur unverändert. D.h.: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so sei $\mathcal{B}$ die σ-Struktur mit Universum $B = A \cup \{a_1, \ldots, a_r\}$ und $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cup \{(a_1, \ldots, a_r)\}$ und $S^{\mathcal{B}} = S^{\mathcal{A}}$ für alle $S \in \sigma \setminus \{R\}$. Falls $\mathcal{B}$ den Grad $\leqslant d$ hat, so setzen wir $U(\mathcal{A}) := \mathcal{B}$; andernfalls setzen wir $U(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$.

Wir halten nun einen $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Satz φ fest. Bei Eingabe einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ wollen wir in Zeit $O(|A|)$ eine geeignete Datenstruktur erzeugen. Diese soll die beiden folgenden Dinge ermöglichen:

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

- Bei Eingabe von “?” soll in Zeit $O(1)$ die korrekte Antwort auf die Frage “Wird φ von der Struktur erfüllt?” ausgegeben werden.

  Hierbei ist mit “Struktur” die aktuell in der Datenstruktur repräsentierte σ-Struktur gemeint (zu Beginn ist dies die σ-Struktur $\mathcal{A}$).
- Bei Eingabe einer Update-Operation U soll die Datenstruktur in Zeit $O(1)$ so modifizert werden, dass sie an Stelle der bisherigen σ-Struktur $\mathcal{A}'$ nun die σ-Strukutur $U(\mathcal{A}')$ repräsentiert.

Wie kann dies bewerkstelligt werden? Beweisen Sie, dass Ihre Lösung korrekt ist.