Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

14. Mai 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 3

zu bearbeiten bis: *21. Mai 2024, 09.15 Uhr*

Aufgabe 1: (40 Punkte)

Als das Spektrum eines $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Satzes φ bezeichnen wir die Menge

$$\mathsf{SPEC}_\sigma(\varphi) := \{|A| : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Sei $\sigma := \emptyset$ und sei $\mathcal{P} := \{5\mathbb{Z}\}$ mit $5\mathbb{Z} := \{5 \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$. Geben Sie eine möglichst elegante Beschreibung genau derjenigen Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ an, für die es einen $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Satz gibt, sodass $M = \mathsf{SPEC}_\sigma(\varphi)$. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

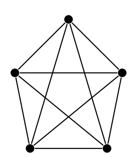
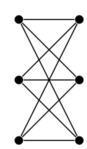
Aufgabe 2: (30 Punkte)

Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist und sei $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Gibt es einen $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Satz φ, sodass für alle endlichen ungerichteten Graphen G und der zu G gehörenden σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

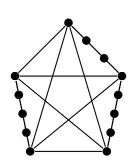
$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad G \text{ ist planar ?}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

K_5 :=  $K_{3,3}$:= 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5: 

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Beweisen Sie Bemerkung 1.8(b), d.h., zeigen Sie, wie sich aus dem Beweis von Theorem 1.5 ein Algorithmus konstruieren lässt, der bei Eingabe einer $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Formel φ und einer Gradschranke $d \geqslant 2$ die Formel ψ in Zeit $\exp_5(\text{poly}(\|\varphi\| + \|\sigma\|) + \lg\lg d)$ berechnet.