Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. April 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 2

zu bearbeiten bis: *7. Mai 2024, 09.15 Uhr*

Bitte beachten Sie die Hinweise zum Erwerb von Übungspunkten unter `hu.berlin/lokalitaet`.

Aufgabe 1: (35 + 15 = 50 Punkte)

(a) Beweisen Sie Lemma 0.4 (inklusive der zweiten Aussage).

Lemma 0.4. Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Signatur σ und Zahlen $d \geqslant 2$, $r \geqslant 0$, $k \geqslant 1$ eine Liste $\mathscr{L}_r^{\sigma,d}(k) \; = \; \tau_1, \ldots, \tau_\ell$ (für eine geeignete Zahl ℓ) von r-Typen mit k Zentren von Grad $\leqslant d$ über σ berechnet, sodass für jeden r-Typen τ mit k Zentren vom Grad $\leqslant d$ über σ gilt: Es gibt genau ein $i \in [\ell]$ sodass $\tau \cong \tau_i$.

Die Laufzeit des Algorithmus ist $2^{(k \cdot \nu_d(r))^{\mathcal{O}(\|\sigma\|)}}$.

Außerdem können wir bei Eingabe von τ in Zeit $2^{(k \cdot \nu_d(r))^{\mathcal{O}(\|\sigma\|)}}$ die Zahl $i \in [\ell]$ berechnen, für die $\tau \cong \tau_i$ gilt.

(b) Sei $\sigma := \{X\}$, wobei X ein 1-stelliges Relationssymbol ist.
Seien $d \geqslant 2$ und $r \geqslant 0$ beliebig gewählt.
Geben Sie für die gegebene Signatur $\sigma = \{X\}$ die gemäß (a) erzeugte Liste $\mathscr{L}_r^{\sigma,d}(1)$ aller r-Typen mit 1 Zentrum vom Grad $\leqslant d$ über σ an.

Aufgabe 2: (10 + 10 + 30 = 50 Punkte)

Sei $\sigma := \{X\}$, wobei X ein 1-stelliges Relationssymbol ist. Sei $S := \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Quadratzahlen und sei $\mathcal{P} := \{S\}$. Betrachten Sie den $\mathsf{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Satz $\varphi \; := \; S(\#(x).x{=}x)$.

(a) Was besagt der Satz φ (d.h.: welche σ-Strukturen erfüllen diesen Satz)?

(b) Geben Sie einen zu φ äquivalenten Satz an, der eine HNF-Formel (gemäß Definition 1.3 der Vorlesung) ist. Begründen Sie, warum dies eine HNF-Formel ist und warum sie äquivalent zu φ ist.

(c) **Definition:** Ein *starker-Hanf-Zählsatz der Signatur* σ *für* $\mathsf{FO}(\mathcal{P})$ ist von der Form $(P{+}m)(t)$, wobei $P \in \mathcal{P} \cup \{\mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ und $m \in \mathbb{Z}$ und t ein Typen-1-Zählterm der Signatur σ ist.

Definition: Eine *starke-HNF-Formel für* $\mathsf{FO}(\mathcal{P})$ *der Signatur* σ ist eine Boolesche Kombination von starken-Hanf-Zählsätzen der Signatur σ für $\mathsf{FO}(\mathcal{P})$ und Formeln der Form $\mathrm{sph}_{\tau,r}(x_1, \ldots, x_k)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und τ ein r-Typ mit k Zentren über σ.

Beweisen Sie, dass es keinen zu φ äquivalenten Satz gibt, der eine starke-HNF-Formel für $\mathsf{FO}(\mathcal{P})$ der Signatur σ ist.

Hinweis: Dies zu beweisen ist nicht so ganz einfach. Falls Ihnen kein Lösungsansatz einfällt, schauen Sie sich Lemma 4.1 der Arbeit [HKS16] an.