Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. April 2024

Ausgewählte Kapitel der Logik: Lokalität

Sommersemester 2024

Übungsblatt 1

zu bearbeiten bis: *30. April 2024, 09.15 Uhr*

Bitte beachten Sie die Hinweise zum Erwerb von Übungspunkten unter `hu.berlin/lokalitaet`.

Aufgabe 1: (20 + 20 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 0.1:

Lemma 0.1. Sei σ eine Signatur und sei $r \in \mathbb{N}$.

(a) Es gibt eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\mathrm{dist}_{\leqslant r}(x,y)$, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \mathrm{dist}_{\leqslant r}[a,b] \iff \mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a,b) \leqslant r \;.$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei τ ein r-Typ mit k Zentren. Für jedes $r' \in \mathbb{N}$ mit $r' \geqslant r$ gibt es eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel $\mathrm{sph}_{\tau,r'}(x_1,\ldots,x_k)$, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a_1,\ldots,a_k \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \mathrm{sph}_{\tau,r'}[a_1,\ldots,a_k] \iff \Big(\mathcal{N}_{r'}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_k),\, a_1,\ldots,a_k\Big) \cong \tau \;.$$

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Sei σ eine beliebige Signatur, $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 2$, $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ eine $\mathsf{FO{+}MOD}[\sigma]$-Formel mit k freien Variablen $x_1,\ldots,x_k$, sei $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $i \in [0,m)$.
Konstruieren Sie einen $\mathsf{FO{+}MOD}[\sigma]$-Satz ψ, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi \quad\iff\quad |\{(a_1,\ldots,a_k) \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k]\}| \;\equiv\; i \bmod m \;.$$

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 0.3(e):

Lemma 0.3. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geqslant 2$. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur von Grad $\leqslant d$. Sei $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_k) \in A^k$. Dann gilt:

(e) Sei $\mathcal{B}$ eine σ-Struktur von Grad $\leqslant d$ und sei $\bar{b} = (b_1,\ldots,b_k) \in B^k$.
Bei Eingabe von $\mathcal{A},\bar{a}$, $\mathcal{B},\bar{b}$ können wir in Zeit

$$\Big(k \cdot \nu_d(r)\Big)^{\mathcal{O}(\|\sigma\| + k\cdot\nu_d(r))} \leqslant 2^{\mathcal{O}\left(\|\sigma\| k^2 \nu_d(r)^2\right)} \leqslant 2^{\mathcal{O}\left(\|\sigma\| k^2 d^{2r+2}\right)}$$

testen, ob $\Big(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}),\, a_1,\ldots,a_k\Big) \cong \Big(\mathcal{N}_r^{\mathcal{B}}(\bar{b}),\, b_1,\ldots,b_k\Big)$ gilt.