Kapitel 3: Gaifman-Normalform und Gaifman-Lokalität

3.1 Der Satz von Gaifman für FO und FO+MOD

Definition 3.1 (lokale Formeln)

Sei L eine Logik (z.B. FO, FO+MOD, FO(P), ...),
sei σ eine Signatur,
sei φ eine FO[σ]-Formel mit frei(φ) $\neq \emptyset$,
seien $\overline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ k verschiedene Variablen (mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$),
s.d. frei(φ) $\subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.

(a) Sei $r \in \mathbb{N}$.
φ heißt **r-lokal** (um $\overline{x}$) falls f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $\overline{a} \in A^k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \models \varphi[\overline{a}]$$

(b) φ heißt **lokal**, falls es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. φ r-lokal ist.

Beispiel 3.2

Für eine Signatur σ und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{dist}_{\leq r}(x,y)$ die Formel aus Lemma 0.1 — d.h. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \mathrm{dist}_{\leq r}[a,b] \iff \mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a,b) \leq r$$

Im Folgenden schreiben wir $\mathrm{dist}(x,y) \leq r$ um die Formel $\mathrm{dist}_{\leq r}(x,y)$ zu bezeichnen.

und $\mathrm{dist}(x,y) > r$ um die Formel

$\neg\, \mathrm{dist}_{\leq r}(x,y)$ zu bezeichnen.

Für ein Tupel $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ von k verschiedenen Variablen (mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) sei

$$\mathrm{dist}(\bar{x}; y) \leq r \quad \text{die Formel} \quad \bigvee_{i=1}^{k} \mathrm{dist}(x_i, y) \leq r$$

und

$$\mathrm{dist}(\bar{x}; y) > r \quad \text{die Formel} \quad \neg\, \mathrm{dist}(\bar{x}; y) \leq r .$$

Man sieht leicht, dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$\mathrm{dist}(x,y) > 2r$ ist r-lokal um x,y

und

$\mathrm{dist}(\bar{x}; y) > 2r$ ist r-lokal um $\bar{x}, y$

(Beweis: Übung).

<u>Definition 3.3</u> (basis-lokale Sätze)

Sei L eine Logik (z.B. FO, FO+MOD, FO(P), ...),
sei σ eine Signatur.
Ein <u>basis-lokaler Satz über L</u> ist ein $L[\sigma]$-Satz der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{\ell} \lambda(x_i) \right),$$

wobei $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda(x)$ eine r-lokale $L[\sigma]$-Formel und $x_1, \ldots, x_\ell$ ℓ verschiedene Variablen sind.

<u>Definition 3.4</u> (lokale FO+MOD-Zählsätze)

Sei σ eine Signatur.

Ein <u>lokaler FO+MOD-Zählsatz</u> ist ein FO+MOD[σ]-Satz der Form

$$\exists^{i \bmod m} x \ \lambda(x)$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$ und $\lambda(x)$ eine lokale FO+MOD[σ]-Formel ist.

<u>Definition 3.5</u> (Gaifman-Normalform für FO und FO+MOD)

Sei σ eine Signatur.

Sei $L \in \{$FO, FO+MOD$\}$.

Eine $L[\sigma]$-Formel γ ist in <u>GNF für L</u>, falls γ eine Boolesche Kombination von

- lokalen Formeln,
- basis-lokalen Sätzen über L,
- lokalen FO+MOD-Zählsätzen (falls L = FO+MOD)

ist.

<u>Beispiel 3.6</u>

Sei $\sigma := \{E/2, R/1, B/1\}$.

Der FO[σ]-Satz

$$\varphi := \exists y \exists z \left(\neg E(y,z) \wedge R(y) \wedge B(z) \right)$$

ist <u>nicht</u> in GNF für FO.

Der $FO[\sigma]$-Satz $\gamma :=$

$$\psi_1 := \Big\{ \underbrace{\exists x \; \overbrace{\exists y \exists z \big(dist(x,y) \leq 2 \wedge dist(x,z) \leq 2 \wedge \neg E(y,z) \wedge R(y) \wedge B(z) \big)}^{\text{2-lokal um } x}}_{\text{basis-lokale Sätze}}$$

$$\vee$$

$$\psi_2 := \Big\{ \Big(\overbrace{\exists x R(x)} \wedge \overbrace{\exists x B(x)} \wedge$$

$$\overbrace{\exists x_1 \exists x_2 \big(dist(x_1,x_2) > 2 \wedge (R(x_1) \vee B(x_1)) \wedge (R(x_2) \vee B(x_2)) \big)}^{\text{basis-lokaler Satz}}$$

$$\Big)$$

ist ein Satz in GNF über FO.

Außerdem gilt: $\gamma \equiv \varphi$.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{A} \models \gamma$

<u>"$\Longrightarrow$"</u> Wegen $\mathcal{A} \models \varphi$ ex $a, b \in A$ s.d. $a \in R^{\mathcal{A}}$, $b \in B^{\mathcal{A}}$, $(a,b) \notin E^{\mathcal{A}}$

<u>Fall 1:</u> $dist^{\mathcal{A}}(a,b) > 2$. Dann sind a, b Zeugen dafür, dass $\mathcal{A} \models \psi_2$, Also auch $\mathcal{A} \models \gamma$, da $\gamma = \psi_1 \vee \psi_2$

<u>Fall 2:</u> $dist^{\mathcal{A}}(a,b) \leq 2$. Dann ist $(x,y,z) \mathrel{\hat{=}} (a,a,b)$ ein Zeuge dafür, dass $\mathcal{A} \models \psi_1$. Also auch $\mathcal{A} \models \gamma$.

<u>"$\Longleftarrow$"</u>: Es gelte $\mathcal{A} \models \gamma$. Beachte: $\gamma = \psi_1 \vee \psi_2$.

<u>Fall 1:</u> $\mathcal{A} \models \psi_1$. Dann gilt offensichtlicherweise auch: $\mathcal{A} \models \varphi$.

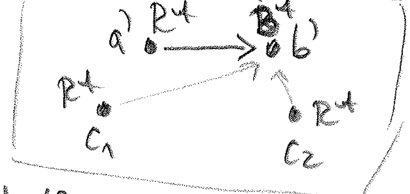
<u>Fall 2:</u> $\mathcal{A} \models \psi_2$. Dann gibt es $a', b' \in A$ mit $a' \in R^{\mathcal{A}}$, $b' \in B^{\mathcal{A}}$.

Falls $(a',b') \notin E^{\mathcal{A}}$, so gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ und wir sind fertig.

Falls $(a',b') \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $dist^{\mathcal{A}}(a',b') \leq 1$.

Wegen $\mathcal{A} \models \psi_2$ gibt es Knoten $c_1, c_2 \in R^{\mathcal{A}} \cup B^{\mathcal{A}}$ mit $dist^{\mathcal{A}}(c_1,c_2) \geq 3$. Falls einer der beiden Knoten c_1, c_2 zu $R^{\mathcal{A}}$ und einer zu $B^{\mathcal{A}}$ gehört, so bezeugen sie, dass $\mathcal{A} \models \varphi$.

Falls $c_1, c_2 \in R^{\mathcal{A}}$, so haben wir folgende Situation:



Angenommen, $(c_1,b') \in E^{\mathcal{A}}$ und $(c_2,b') \in E^{\mathcal{A}}$, dann wäre $dist^{\mathcal{A}}(c_1,c_2) \leq 2$ ↯. Somit ex $i \in \{1,2\}$ s.d. $(c_i,b') \notin E^{\mathcal{A}}$, und c_i, b' bezeugen, dass $\mathcal{A} \models \varphi$.

Der Fall, dass $c_1, c_2 \in B^{\mathcal{A}}$ kann analog behandelt werden (↗ Übung). $\square$

Theorem 3.6 (Satz von Gaifman für FO und FO+MOD)

Sei σ eine Signatur.
Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$.

Jede $L[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $L[\sigma]$-Formel γ in GNF für L, und $frei(\gamma) = frei(\varphi)$.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der bei Eingabe von φ eine solche Formel γ berechnet.

Die Aussage für $L = FO$ wurde 1981 von Gaifman bewiesen; die Aussage für $L = FO+MOD$ wurde 2018 von Kuske und Schweikardt bewiesen.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von φ.
Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$ und betrachte eine beliebige $L[\sigma]$-Formel φ. Sei $k = |frei(\varphi)|$, sei $frei(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und sei $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_k)$. Beachte: Wenn $k = 0$, dann $\bar{x} = ()$.

Induktionsanfang: φ atomar.
Dann ist φ 0-lokal um $\bar{x}$ und somit in GNF für L.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$.
Gemäß Induktionsannahme können wir eine zu φ_1 äquivalente $L[\sigma]$-Formel γ_1 in GNF für L berechnen.
Dann ist $\gamma := \neg\gamma_1$ eine zu φ äquivalente $L[\sigma]$-Formel in GNF für L

Fall 2: φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
Analog: Berechne GNF-Formeln γ_i für $i \in \{1,2\}$ und setze $\gamma := (\gamma_1 \vee \gamma_2)$

$\boxed{\text{Fall 3}}$ φ ist von der Form $\exists y\, \varphi'$.

OBdA ist $\text{frei}(\varphi') = \{x_1, \dots, x_k, y\}$.

Gemäß Induktionsannahme können wir eine zu φ' äquivalente GNF-Formel $\gamma'(\bar{x}, y)$ für L berechnen.

γ' ist eine Boolesche Kombination von $L[\sigma]$-Sätzen und von lokalen $L[\sigma]$-Formeln. Wir bringen γ' in "disjunktive Normalform" und erhalten eine zu γ' äquivalente $L[\sigma]$-Formel der Form

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left(\chi_i \wedge \lambda_i(\bar{x}, y) \right),$$

wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, χ_i ist ein $L[\sigma]$-Satz und $\lambda_i(\bar{x}, y)$ ist eine r_i-lokale $L[\sigma]$-Formel, für eine Zahl $r_i \in \mathbb{N}$. (f.a. $i \in \{1, \dots, n\}$). Setze $r := \max\{r_1, \dots, r_n\}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \exists y\, \varphi' \\
&\equiv \exists y \bigvee_{i=1}^{n} \left(\chi_i \wedge \lambda_i(\bar{x}, y) \right) \\
&\equiv \bigvee_{i=1}^{n} \exists y \left(\chi_i \wedge \lambda_i(\bar{x}, y) \right) \\
&\equiv \bigvee_{i=1}^{n} \left(\chi_i \wedge \exists y\, \lambda_i(\bar{x}, y) \right).
\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ χ_i ein GNF-Satz für L ist. Um Fall 3 abzuschließen genügt es daher, ein beliebiges $i \in \{1, \dots, n\}$ zu betrachten und eine zu $\exists y\, \lambda_i(\bar{x}, y)$ äquivalente GNF-Formel zu berechnen.

Falls $k=0$, also $\bar{x} = ()$ ist, so ist $\exists y\, \lambda_i(y)$ ein basis-lokaler Satz und wir sind fertig.

Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass $k \geq 1$ und $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ist.

Wir wissen, dass $\lambda_i(\bar{x}, y)$ r-lokal um $\bar{x}, y$ ist.

Setze $r' := 2r+1$. Es gilt:

$$\exists y\, \lambda_i(\bar{x}, y) \equiv \underbrace{\exists y \left(\text{dist}(\bar{x}; y) \leq r' \wedge \lambda_i(\bar{x}, y) \right)}_{\text{ist } (r'+r)\text{-lokal um } \bar{x}, \text{ also in GNF}} \vee \exists y \left(\text{dist}(\bar{x}; y) > r' \wedge \lambda_i(\bar{x}, y) \right)$$

Es genügt also, eine zu $\exists y\,(\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \lambda_i(\bar{x},y))$ äquivalente GNF-Formel zu berechnen.

Wir nutzen dazu zunächst Korollar 2.6, um eine endliche, nicht-leere Menge Δ von Paaren $(\alpha(\bar{x}), \beta(y))$ von r-lokalen $L[\sigma]$-Formeln zu berechnen, s.d. gilt:

$$\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \lambda_i(\bar{x},y)$$

$$\equiv \quad \mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\alpha(\bar{x}) \wedge \beta(y)).$$

Somit gilt:

$$\exists y\,(\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \lambda_i(\bar{x};y))$$

$$\equiv \exists y\,(\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\alpha(\bar{x}) \wedge \beta(y)))$$

$$\equiv \exists y \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \alpha(\bar{x}) \wedge \beta(y))$$

$$\equiv \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\underbrace{\alpha(\bar{x})}_{r\text{-lokal, also in GNF}} \wedge \exists y\,(\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \beta(y)))$$

Um Fall 3 abzuschließen genügt es daher, eine beliebige r-lokale $L[\sigma]$-Formel $\beta(y)$ zu betrachten und eine zur Formel

$$\mu(\bar{x}) := \exists y\,(\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \beta(y))$$

äquivalente GNF-Formel $\gamma(\bar{x})$ zu finden.

Zur Konstruktion von $\gamma(\bar{x})$ nutzen wir folgende Formeln:

Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$\theta_\ell := \exists y_1 \cdots \exists y_\ell \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathrm{dist}(y_i; y_j) > 2r' \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} \beta(y_i) \Big)$$

$$\psi_\ell(\bar{x}) := \neg \exists y_1 \cdots \exists y_\ell \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \mathrm{dist}(\bar{x}; y_i) \leq r' \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathrm{dist}(y_i; y_j) > 2r' \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} \beta(y_i)$$

und sei

$$\delta(\bar{x}) := \exists y \Big(\mathrm{dist}(\bar{x}; y) \leq 3r' \wedge \mathrm{dist}(\bar{x}; y) > r' \wedge \beta(y) \Big).$$

Klar: θ_ℓ ist ein basis-lokaler Satz über L,

$\psi_\ell(\bar{x})$ ist $(r'+r)$-lokal um $\bar{x}$,

$\delta(\bar{x})$ ist $(3r'+r)$-lokal um $\bar{x}$.

Daher ist die folgende Formel in GNF für L:

$$\gamma(\bar{x}) := \theta_{k+1} \vee \bigvee_{\ell=1}^{k} \Big(\theta_\ell \wedge \neg \theta_{\ell+1} \wedge \big(\psi_\ell(\bar{x}) \vee \delta(\bar{x}) \big) \Big)$$

Behauptung 1 $\gamma \equiv \mu$

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\bar{a} \in A^k$.

Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \gamma[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \mu[\bar{a}]$.

Fall I: $\mathcal{A} \models \theta_\ell$ für ein $\ell \geq k+1$. Dann gilt auch: $\mathcal{A} \models \theta_{k+1}$.
Daher gilt auch: $\mathcal{A} \models \gamma[\bar{a}]$. Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \mu[\bar{a}]$.
Wegen $\mathcal{A} \models \theta_{k+1}$ gibt es $k+1$ Elemente $b_1, \ldots, b_{k+1} \in A$ vom paarweisen Abstand $> 2r'$ mit $\mathcal{A} \models \beta[b_i]$ f.a. $i \in \{1, \ldots, k+1\}$.
Angenommen, für jedes $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ ex ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ s.d. $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a_j, b_i) \leq r'$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ und zwei verschiedene $i, i' \in \{1, \ldots, k+1\}$ s.d. $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a_j, b_i) \leq r'$ und $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a_j, b_{i'}) \leq r'$
Aber dann ist $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(b_i, b_{i'}) \leq 2r'$. Widerspruch!
Somit gibt es ein $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ s.d $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a_j, b_i) > r'$ f.a. $j \in \{1, \ldots, k\}$ ist.
Dieses b_i bezeugt, dass $\mathcal{A} \models \mu[\bar{a}]$.

<u>Fall II</u>: $\mathfrak{A} \not\models \theta_1$.

Dann gibt es kein $b \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \beta[b]$.

Daher gilt: $\mathfrak{A} \not\models \mu[\bar{a}]$ und $\mathfrak{A} \not\models \gamma[a]$.

<u>Fall III</u> Es gibt ein $\ell \in \{1,\dots,k\}$ s.d. $\mathfrak{A} \models \theta_\ell \wedge \neg\theta_{\ell+1}$

<u>Fall III.1</u>: $\mathfrak{A} \models \psi_\ell[\bar{a}]$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \models \gamma[\bar{a}]$. Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models \mu[\bar{a}]$

Es gilt: Wegen $\mathfrak{A} \models \theta_\ell$ gibt es ℓ Elemente $b_1,\dots,b_\ell$, die paarweisen Abstand $> 2r'$ haben mit $\mathfrak{A} \models \beta[b_i]$ f.a. $i \in \{1,\dots,\ell\}$.

Und wegen $\mathfrak{A} \models \psi_\ell[\bar{a}]$ haben nicht alle der $b_1,\dots,b_\ell$ Abstand $\leq r'$ zu $\bar{a}$. Somit hat mind. eins der $b_1,\dots,b_\ell$ Abstand $> r'$ zu $\bar{a}$ und bezeugt daher, dass $\mathfrak{A} \models \mu[\bar{a}]$ gilt.

<u>Fall III.2</u>: $\mathfrak{A} \models \delta[\bar{a}]$

Dann gilt: $\mathfrak{A} \models \gamma[\bar{a}]$ und $\mathfrak{A} \models \mu[\bar{a}]$ (gemäß Konstruktion von δ)

<u>Fall III.3</u>: $\mathfrak{A} \not\models \psi_\ell[\bar{a}]$ und $\mathfrak{A} \not\models \delta[\bar{a}]$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \not\models \gamma[\bar{a}]$. Zu zeigen: $\mathfrak{A} \not\models \mu[\bar{a}]$.

Angenommen, $\mathfrak{A} \models \mu[\bar{a}]$. Dann gibt es ein $b \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \beta[b]$ und $\mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(\bar{a};b) > r'$.

Wegen $\mathfrak{A} \not\models \delta[\bar{a}]$ gilt: $\mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(\bar{a};b) > 3r'$ (*)

Wegen $\mathfrak{A} \not\models \psi_\ell[\bar{a}]$ gibt es ℓ Elemente $b_1,\dots,b_\ell \in A$ vom paarweisen Abstand $> 2r'$ mit $\mathfrak{A} \models \beta[b_i]$ und $\mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, b_i) \leq r'$ f.a. $i \in \{1,\dots,\ell\}$.

Für jedes $i \in \{1,\dots,\ell\}$ ist $\mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(b_i,b) > 2r'$, denn sonst wäre $\mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(\bar{a};b) \leq \mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(\bar{a};b_i) + \mathrm{dist}^{\mathfrak{A}}(b_i,b) \leq r' + 2r' = 3r'$, was im Widerspruch zu (*) steht.

Somit bezeugen $b_1,\dots,b_\ell,b$, dass $\mathfrak{A} \models \theta_{\ell+1}$ gilt. Aber dies widerspricht Fall 3, in dem ja gilt: $\mathfrak{A} \models \theta_\ell \wedge \neg\theta_{\ell+1}$.

□ Behauptung

Dies beendet die Konstruktion für Fall 3.

$\boxed{\text{Fall 4:}}$ φ ist von der Form $\exists^{i \bmod m} y\, \varphi'$ mit $m \in \mathbb{N}, m \geq 2, i \in \{0,..,m-1\}$

In diesem Fall ist $L = $ FO+MOD.

Wir beginnen genauso wie in Fall 3, um eine zu φ' äquivalente $L[\sigma]$-Formel der Form

$$\bigvee_{j=1}^{n} \left(\chi_j \wedge \lambda_j(\bar{x}, y) \right)$$

zu erhalten, wobei jedes χ_j ein GNF-Satz und jedes λ_j r-lokal um $(\bar{x}, y)$ ist.

Für jedes $J \subseteq \{1,..,n\}$ sei

$$\chi_J := \bigwedge_{j \in J} \chi_j \wedge \bigwedge_{j \in [n] \setminus J} \neg \chi_j \quad \text{und} \quad \lambda_J(\bar{x}, y) := \bigvee_{j \in J} \lambda_j(\bar{x}, y).$$

Man sieht leicht, dass gilt (Details: Übung):

(1) $$\bigvee_{j=1}^{n} \left(\chi_j \wedge \lambda_j(\bar{x}, y) \right) \equiv \bigvee_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \left(\chi_J \wedge \lambda_J(\bar{x}, y) \right),$$

(2) Die $(\chi_J)_{J \subseteq [n]}$ schließen sich gegenseitig aus, d.h. für $J, J' \subseteq [n]$ mit $J \neq J'$ ist $\chi_J \wedge \chi_{J'}$ unerfüllbar.

(3) Für jedes $J \subseteq [n]$ ist χ_J ein GNF-Satz und λ_J ist r-lokal.

Insgesamt gilt:

$$\varphi = \exists^{i \bmod m} y\, \varphi'$$

$$\equiv \exists^{i \bmod m} y \left(\bigvee_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \left(\chi_J \wedge \lambda_J(\bar{x}, y) \right) \right).$$

Sei $$\tilde{\varphi} := \bigvee_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \left(\chi_J \wedge \exists^{i \bmod m} y\, \lambda_J(\bar{x}, y) \right)$$

Behauptung 2

Für $i \neq 0$ ist $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$.

Für $i = 0$ ist $\varphi \equiv \tilde{\varphi} \vee \chi_\emptyset$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\bar{a} \in A^k$.
Sei $J_0 := \{ j \in [n] : \mathcal{A} \models \chi_j \}$. Dann gilt: $\mathcal{A} \models \chi_{J_0}$ und $\mathcal{A} \not\models \chi_J$ f.a. $J \subseteq [n]$ mit $J \neq J_0$.

Falls $J_0 \neq \emptyset$, so gilt:

$$\left| \left\{ b \in A : (\mathcal{A}, \bar{a}, b) \models \bigvee_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \left(\chi_J \wedge \lambda_J(\bar{x}, y) \right) \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ b \in A : (\mathcal{A}, \bar{a}, b) \models \lambda_{J_0}(\bar{x}, y) \right\} \right|,$$

und daher gilt: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \bar{a}) \models \tilde{\varphi} \iff (\mathcal{A}, \bar{a}) \models \tilde{\varphi} \vee \chi_\emptyset$.

Falls $J_0 = \emptyset$, so gilt: $\mathcal{A} \models \chi_\emptyset$, $\mathcal{A} \not\models \tilde{\varphi}$, $\mathcal{A} \models \tilde{\varphi} \vee \chi_\emptyset$ und

$$\left| \left\{ b \in A : (\mathcal{A}, \bar{a}, b) \models \bigvee_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} \left(\chi_J \wedge \lambda_J(\bar{x}, y) \right) \right\} \right|$$

$$= 0,$$

und daher gilt: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \varphi \iff i = 0$

Somit: Falls $i = 0$, so $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \varphi$ und $(\mathcal{A}, \bar{a}) \models \tilde{\varphi} \vee \chi_\emptyset$.
Falls $i \neq 0$, so $(\mathcal{A}, \bar{a}) \not\models \varphi$ und $(\mathcal{A}, \bar{a}) \not\models \tilde{\varphi}$.

$\square$ Behauptung

Um den Beweis für Fall 4 abzuschließen genügt es, äquivalente GNF-Formeln für $\tilde{\varphi}$ und für $\tilde{\varphi} \vee \chi_\emptyset$ zu konstruieren.
Da gemäß ② χ_J ein GNF-Satz ist (für jedes $J \subseteq [n]$), genügt es im Folgenden, ein beliebiges $J \subseteq [n]$ zu betrachten und die Formel $\exists^{i \bmod m} y\, \lambda_J(\bar{x}, y)$ in GNF zu transformieren.

Setze $\lambda(\bar{x},y) := \lambda_{\bar{y}}(\bar{x},y)$ und beachte, dass λ r-lokal um $\bar{x},y$ ist (gemäß ③).

Setze $r' := 2r+1$. Es gilt für

$I := \{(i_1,i_2) : i_1,i_2 \in \{0,\dots,m-1\},\ i_1+i_2 \equiv i \bmod m\}$, dass

$$\exists^{i \bmod m} y\ \lambda(\bar{x},y)$$

$$\equiv \bigvee_{(i_1,i_2) \in I} \Big(\underbrace{\exists^{i_1 \bmod m} y\ (\mathrm{dist}(\bar{x},y) \le r' \wedge \lambda(\bar{x},y))}_{\text{ist } (r'+r)\text{-lokal um } \bar{x}\text{, also in GNF}} \wedge \exists^{i_2 \bmod m} y\ (\mathrm{dist}(\bar{x},y) > r' \wedge \lambda(\bar{x},y)) \Big)$$

Um den Beweis abzuschließen genügt es, ein beliebiges $i_2 \in \{0,\dots,m-1\}$ zu betrachten und die Formel

$$\mu(\bar{x}) := \exists^{i_2 \bmod m} y\ (\mathrm{dist}(\bar{x},y) > r' \wedge \lambda(\bar{x},y))$$

in GNF zu transformieren.

Wir nutzen dazu zunächst Korollar 2.6 um eine endliche, nicht-leere Menge Δ von Paaren $(\alpha(\bar{x}), \beta(y))$ von r-lokalen $L[\sigma]$-Formeln zu berechnen, s.d. gilt:

$$\mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \lambda(\bar{x},y)$$

$$\equiv \mathrm{dist}(\bar{x};y) > r' \wedge \bigvee_{(\alpha,\beta) \in \Delta} (\alpha(\bar{x}) \wedge \beta(y)).$$

Gemäß Lemma 2.4 können wir o.B.d.A annehmen, dass die αs in Δ sich gegenseitig ausschließen. Wir erhalten:

$$\mu(\bar{x}) = \exists^{i_2 \bmod m} y\ (\mathrm{dist}(\bar{x},y) > r' \wedge \lambda(\bar{x},y))$$

$$\equiv \exists^{i_2 \bmod m} y\ \Big(\mathrm{dist}(\bar{x},y) > r' \wedge \bigvee_{(\alpha,\beta) \in \Delta} (\alpha(\bar{x}) \wedge \beta(y))\Big)$$

$$\equiv \exists^{i_2 \bmod m} y \bigvee_{(\alpha,\beta) \in \Delta} (\alpha(\bar{x}) \wedge \mathrm{dist}(\bar{x},y) > r' \wedge \beta(y))$$

Sei $\tilde{\mu}(\bar{x}) := \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} \Big(\underbrace{\alpha(\bar{x})}_{r\text{-lokal}} \wedge \exists^{i_2 \bmod m} y \, (dist(\bar{x};y) > r' \wedge \beta(y)) \Big)$,

sei $\mathbb{A} := \{ \alpha : \text{ex } \beta \text{ s.d. } (\alpha,\beta) \in \Delta \}$

Behauptung 3

Für $i_2 \neq 0$ ist $\mu(\bar{x}) \equiv \tilde{\mu}(\bar{x})$.

Für $i_2 = 0$ ist $\mu(\bar{x}) \equiv \tilde{\mu}(\bar{x}) \vee \bigwedge_{\alpha\in\mathbb{A}} \neg\alpha(\bar{x})$

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur, sei $\bar{a} \in A^k$.

Fall I: Ex $\hat{\alpha} \in \mathbb{A}$ s.d. $\mathcal{A} \models \hat{\alpha}[\bar{a}]$. Sei $\hat{\beta}$ s.d. $(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \in \Delta$.

Da die αs in Δ sich gegenseitig ausschließen gilt

$\mathcal{A} \not\models \alpha'[\bar{a}]$ f.a. $\alpha' \in \mathbb{A} \setminus \{\hat{\alpha}\}$.

Somit gilt:

$\{ b \in A : \text{ex } (\alpha,\beta) \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}], \, dist^{\mathcal{A}}(\bar{a};b) > r' \text{ und } \mathcal{A} \models \beta[b] \}$

$= \{ b \in A : dist^{\mathcal{A}}(\bar{a};b) > r' \text{ und } \mathcal{A} \models \hat{\beta}[b] \}$,

und es gilt: $\mathcal{A} \models \mu[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \tilde{\mu}[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \big(\tilde{\mu} \vee \bigwedge_{\alpha\in\mathbb{A}} \neg\alpha\big)[\bar{a}]$.

Fall II: f.a. $\alpha \in \mathbb{A}$ gilt: $\mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}]$.

Dann gilt:

$\big| \{ b \in A : \text{ex } (\alpha,\beta) \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}], \, dist^{\mathcal{A}}(\bar{a},b) > r' \text{ und } \mathcal{A} \models \beta[b] \} \big|$

$= 0$, und somit:

$\mathcal{A} \models \mu[\bar{a}] \iff i_2 = 0$.

Falls $i_2 = 0$, so gilt $\mathcal{A} \models \mu[\bar{a}]$ und $\mathcal{A} \models \big(\tilde{\mu} \vee \bigwedge_{\alpha\in\mathbb{A}} \neg\alpha\big)[\bar{a}]$.

Falls $i_2 \neq 0$, so gilt $\mathcal{A} \not\models \mu[\bar{a}]$ und $\mathcal{A} \not\models \tilde{\mu}[\bar{a}]$.

$\square$ Behauptung 3

Auf Grund von Behauptung 3 genügt es, eine beliebige r-lokale $L[\sigma]$-Formel $\beta(y)$ zu betrachten und eine zu

$$\exists^{i_2 \bmod m} y \left(dist(\bar{x}, y) > r' \wedge \beta(y) \right)$$

äquivalente GNF-Formel zu konstruieren.

Dieses ist nicht schwer:

Sei $J := \{ (j_1, j_2) : j_1, j_2 \in \{0, \dots, m-1\} : j_1 - j_2 \equiv i_2 \mod m \}$.

Dann ist

$$\exists^{i_2 \bmod m} y \left(dist(\bar{x}, y) > r' \wedge \beta(y) \right)$$

$$\equiv \bigvee_{(j_1, j_2) \in J} \left(\underbrace{\exists^{j_1 \bmod m} y\, \beta(y)}_{\text{ein lokaler FO+MOD-Zählsatz}} \wedge \underbrace{\exists^{j_2 \bmod m} y \left(dist(\bar{x}, y) \leq r' \wedge \beta(y) \right)}_{(r'+r)\text{-lokal um } \bar{x}} \right),$$

denn f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $\bar{a} \in A^k$ gilt:

$$\{ b \in A : \mathcal{A} \models \beta[b] \}$$

$$= \{ b \in A : \mathcal{A} \models \beta[b] \text{ und } dist^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b) > r' \} \,\dot{\cup}\, \{ b \in A : \mathcal{A} \models \beta[b] \text{ und } dist^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b) \leq r' \}$$

Diese Formel ist in GNF für FO+MOD.

Dies beendet den Beweis für Fall 4 und insgesamt den Beweis für Theorem 3.6.

$\square$

Bemerkung 3.7

Der Lokalitätsradius eines basis-lokalen Satzes der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le \ell} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{\ell} \lambda(x_i) \Big)$$

ist definiert als die Zahl r.

Wir sagen: Ein lokaler FO+MOD-Zählsatz der Form $\exists^{i \bmod m} x\, \lambda(x)$ hat Lokalitätsradius $\le r$, wenn die Formel λ r-lokal um x ist.

Eine lokale Formel $\psi(\bar{x})$ hat Lokalitätsradius $\le r$, falls sie r-lokal um $\bar{x}$ ist.

Eine Formel γ in GNF für $L \in \{FO, FO+MOD\}$ hat Lokalitätsradius $\le r$, falls sie eine Boolesche Kombination von lokalen Formeln, basis-lokalen Sätzen über L und/oder lokalen FO+MOD-Zählsätzen (falls $L = FO+MOD$) mit Lokalitätsradius $\le r$ ist.

Der von Theorem 3.6 bereitgestellte Algorithmus konstruiert zu jeder Formel φ der Quantorentiefe $q := qr(\varphi)$ eine äquivalente GNF-Formel γ vom Lokalitätsradius $\le r(q)$, mit $r(0) = 0$ und $r(i+1) \le 7 \cdot r(i) + 3$ f.a. $i \in \mathbb{N}$ (dies folgt direkt aus dem Beweis von Theorem 3.6; Details: Übung!).

Per Induktion nach i folgt: $r(i) < 7^i$ f.a. $i \in \mathbb{N}$

(Beweis: $i = 0$: $r(0) = 0 < 1 = 7^0$ ✓

$i \to i+1$: $r(i+1) \le 7 \cdot r(i) + 3 \underset{\text{Ind.ann.}}{\le} 7 \cdot (7^i - 1) + 3 = 7^{i+1} - 7 + 3 < 7^{i+1}$)

Somit hat die zu φ äquivalente GNF-Formel γ den Lokalitätsradius $< 7^{qr(\varphi)}$.

Im Folgenden werden zwei Anwendungsbereiche des Satzes von Gaifman vorgestellt.

(1) Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate:

Der Satz von Gaifman liefert ein Werkzeug um zu zeigen, dass bestimmte Anfragen nicht in FO oder FO+MOD formalisiert werden können die Gaifman-Lokalität der Logiken FO und FO+MOD. Details dazu finden sich in Kapitel 3.2.

(2) Algorithmische Meta-Theoreme:

Die Transformation in Gaifman-Normalform kann oft als erster Schritt verwendet werden, um effiziente Algorithmen für Berechnungsprobleme, die durch FO- oder FO+MOD-Formeln gegeben sind, zu entwickeln. Details dazu finden sich in Kapitel 3.3.

3.2 Die Gaifman-Lokalität von FO und FO+MOD

Definition 3.8 (Anfragen)

Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(a) Eine <u>k-stellige Anfrage</u> (engl.: query) ist eine Abbildung Q, die jeder σ-Struktur $\mathcal{A}$ eine k-stellige Relation $Q(\mathcal{A}) \subseteq A^k$ zuordnet.

(b) Sei S eine Klasse von σ-Strukturen und sei L eine Logik.
Eine k-stellige Anfrage Q heißt <u>L-definierbar auf S</u>, falls es eine $L[\sigma]$-Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ und $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ für k verschiedene Variablen $x_1, \dots, x_k$ gibt, so dass f.a. $\mathcal{A} \in S$ gilt:

$$Q(\mathcal{A}) = [\![\varphi(\bar{x})]\!]^{\mathcal{A}} := \{ \bar{a} \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \}.$$

Beispiel 3.9

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Die 1-stellige Anfrage $Q_{\text{isolierte-Punkte}}$, die jedem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ die Menge

$$Q_{\text{isolierte-Punkte}}(\mathcal{A}) := \left\{ a \in A : \begin{array}{l}\text{es gibt in } \mathcal{A} \text{ keine Kante} \\ \text{von oder zu Knoten } a\end{array} \right\}$$

zuordnet, ist FO-definierbar (auf der Klasse aller σ-Strukturen) durch die Formel $\varphi(x) := \neg \exists y \big(E(x,y) \vee E(y,x) \big)$

In Kapitel 1 haben wir bereits den Begriff der Hanf-Lokalität (als Eigenschaft von Strukturklassen) kennengelernt.

Ein etwas anderer Lokalitätsbegriff, der sich nicht auf Strukturklassen, sondern auf Anfragen bezieht, ist die folgendermaßen definierte Gaifman-Lokalität.

<u>Notation 3.10</u>

Sei σ eine Signatur, L eine Logik und $k, m \in \mathbb{N}$.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und Tupel $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^k$ schreiben wir

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m^L (\mathcal{B}, \bar{b})$$

falls f.a. $L[\sigma]$-Formeln φ mit $qr(\varphi) \leq m$ und $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ für k verschiedene Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

<u>Definition 3.11</u> (Gaifman-Lokalität)

Sei σ eine Signatur, sei L eine Logik, sei S eine Klasse von σ-Strukturen und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Eine k-stellige Anfrage Q heißt <u>Gaifman-lokal auf S bzgl. L</u>, falls es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. f.a. $\mathcal{A} \in S$ und alle $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in A^k$ mit $(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}) \equiv_m^L (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{b}), \bar{b})$ gilt: $\bar{a} \in Q(\mathcal{A}) \iff \bar{b} \in Q(\mathcal{A})$.

Aus dem Satz von Gaifman für FO und FO+MOD folgt unmittelbar:

<u>Satz 3.12</u> (Gaifman-Lokalität von FO und FO+MOD)

Für jede Signatur σ, jede Klasse S von σ-Strukturen und jedes $L \in \{FO, FO+MOD\}$ gilt:

Alle Anfragen, die L-definierbar auf S sind, sind Gaifman-lokal auf S bzgl. L.

<u>Beweis:</u> Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$.

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sei $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, sei $\varphi(\bar{x})$ eine $L[\sigma]$-Formel mit $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ und sei Q die von $\varphi(\bar{x})$ auf S definierte k-stellige Anfrage.

Gemäß dem Satz von Gaifman (Theorem 3.6) ist $\varphi(\bar{x})$ äquivalent zu einer $L[\sigma]$-Formel $\gamma(\bar{x})$, die in GNF für L ist. Somit ist $\gamma(\bar{x})$ eine Boolesche Kombination von $L[\sigma]$-Sätzen $\chi_1, \dots, \chi_s$ (für eine geeignete Zahl s) und von lokalen $L[\sigma]$-Formeln $\lambda_1(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})$ (für eine geeignete Zahl t).

Von Bemerkung 3.7 wissen wir insbes., dass jede der Formeln $\lambda_1(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})$ r-lokal um $\bar{x}$ ist für $r := 7^{qr(\varphi)}$.

Sei $m := \max\{qr(\lambda_i) : i \in \{1, \dots, t\}\}$

Betrachte nun eine beliebige σ-Struktur $\mathcal{A} \in S$ und beliebige Tupel $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in A^k$ mit

$$\left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}\right) \equiv_m^L \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{b}), \bar{b}\right). \quad (*)$$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}]$

Wegen $(*)$ gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, t\}$:

$$\mathcal{A} \models \lambda_i[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \lambda_i[\bar{b}]$$

(da λ_i r-lokal ist und Quantorentiefe $\leq m$ hat).

Da χ_j ein <u>Satz</u> ist, gilt außerdem für jedes $j \in \{1, \ldots, s\}$:

$$\mathcal{A} \models \chi_j[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \chi_j[\bar{b}].$$

Da γ eine Boolesche Kombination der Formeln $\chi_1, \ldots, \chi_s, \lambda_1(\bar{x}), \ldots, \lambda_t(\bar{x})$ ist, folgt:

$$\mathcal{A} \models \gamma[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \gamma[\bar{b}].$$

Und da γ äquivalent zu φ ist, gilt auch

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}].$$

Somit ist die durch $\varphi(\bar{x})$ auf S definierte Anfrage Gaifman-lokal auf S bzgl. L.

Bemerkung 3.13

Indem man zeigt, dass eine Anfrage nicht Gaifman-lokal ist, kann man (unter Verwendung von Satz 3.12) folgern, dass die Anfrage nicht L-definierbar (für $L = \mathrm{FO}$ bzw. $L = \mathrm{FO{+}MOD}$) ist.

Beispiel 3.14

Sei $\sigma := \{E/2\}$.

Die Erreichbarkeits-Anfrage E^*, die jedem endlichen gerichteten Graphen $\mathfrak{A}$ die Relation

$$E^*(\mathfrak{A}) := \{ (a_1,a_2) \in A \times A : \text{es gibt in } \mathfrak{A} \text{ einen Weg von Knoten } a_1 \text{ zu Knoten } a_2 \}$$

zuordnet, ist nicht Gaifman-lokal auf der Klasse aller endlichen gerichteten Graphen bzgl FO+MOD, und daher gemäß Satz 3.12 auch nicht FO+MOD-definierbar auf der Klasse aller endlichen gerichteten Graphen.

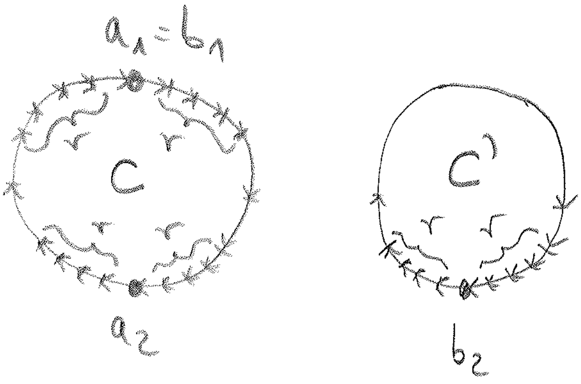
Beweis:

Angenommen, die Anfrage E^* wäre doch Gaifman-lokal.

Δ Dann gibt es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ s.d. f.a. endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a_1,a_2,b_1,b_2 \in A$ mit $(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a_1,a_2),a_1,a_2) \equiv_m^{\mathrm{FO+MOD}} (\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b_1,b_2),b_1,b_2)$ gilt: a_2 ist von a_1 aus in $\mathfrak{A}$ erreichbar $\iff$ b_2 ist von b_1 aus in $\mathfrak{A}$ erreichbar.

Betrachte nun aber konkret die σ-Struktur $\mathcal{A}$, die aus 2 disjunkten gerichteten Kreisen C und C' auf je $2(2r+1)+2 = 4r+4$ Knoten besteht.

Skizze: $\mathcal{A}$:

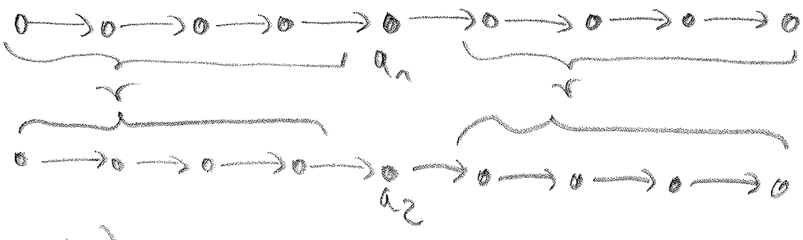


Ferner seien a_1 und a_2 zwei Knoten auf C vom Abstand $\mathrm{dist}^{\mathcal{A}}(a_1,a_2) > 2r+1$.

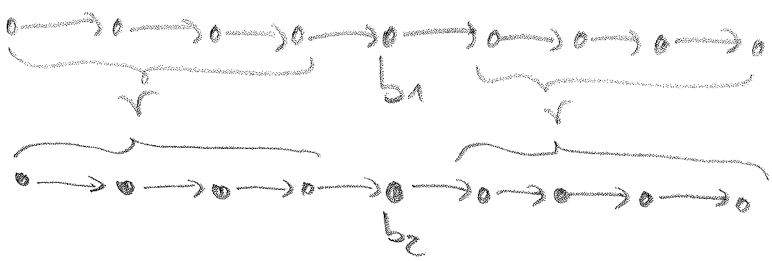
Sei $b_1 := a_1$ und sei b_2 ein beliebiger Knoten auf C'.

Insbes. ist a_2 von a_1 aus erreichbar, aber b_2 ist nicht von b_1 aus erreichbar.

Dann ist $W_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2)$ von der Form



und $W_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2)$ ist von der Form



Somit ist

$$(W_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2), a_1, a_2) \cong (W_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2), b_1, b_2)$$ und daher

auch $(W_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2), a_1, a_2) \equiv_m^{FO+MOD} (W_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2), b_1, b_2)$. ↯ Widerspruch zu $\triangle$ □