Kapitel 2: Feferman-Vaught-Zerlegungen

Definition 2.1

Sei σ eine Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$.

(a) Die disjunkte Vereinigung $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die σ-Struktur $\mathcal{C}$ mit Universum $C := A \cup B$ und $R^{\mathcal{C}} := R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ f.a. $R \in \sigma$.

(b) Seien X, Y zwei 1-stellige Relationssymbole mit $X, Y \notin \sigma$. Wir definieren $\sigma_2 := \sigma \cup \{X, Y\}$.

Die disjunkte Summe $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ist die σ_2-Struktur $\mathcal{C}$ mit Universum $C := A \cup B$, $X^{\mathcal{C}} := A$, $Y^{\mathcal{C}} := B$ und $R^{\mathcal{C}} := R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ f.a. $R \in \sigma$.

Mit Hilfe von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen lässt sich leicht ein sog. Kompositionslemma beweisen, das Folgendes besagt:

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}', \mathcal{B}'$ σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$ und $A' \cap B' = \emptyset$ und sei $m \in \mathbb{N}$.

Wenn $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{A}'$ und $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{B}'$, dann $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}'$

Hierbei bedeutet $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{A}'$, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ dieselben $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ erfüllen.

Der folgende Begriff einer Feferman-Vaught-Zerlegung kann als eine "Verfeinerung" dieses Kompositionslemmas angesehen werden: er liefert zu einer Formel, die in $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ erfüllt wird, eine Kombination von Formeln, die jeweils nur in $\mathcal{A}$ oder nur in $\mathcal{B}$ ausgewertet werden.

<u>Definition 2.2</u> (Feferman-Vaught-Zerlegung)

Sei L eine Logik (z.B. FO, FO+MOD, FO(Q)).

Sei σ eine Signatur.

Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und seien $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_l)$ $k+l$ verschiedene Variablen.

Sei $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine $L[\sigma]$-Formel mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l\}$

Sei $\Delta \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Tupeln der Form $(\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{y}))$ mit $\alpha, \beta \in L[\sigma]$ und $\text{frei}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, $\text{frei}(\beta) \subseteq \{y_1, \dots, y_l\}$

Δ ist eine <u>Feferman-Vaught-Zerlegung</u> (kurz: FVZ) in L von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$, falls f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und alle $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^l$ gilt:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}, \bar{b}]$$

$$\iff \underbrace{\text{ex. } (\alpha, \beta) \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]}_{\text{kurz: } \text{"} \bigvee_{(\alpha,\beta)\in\Delta} (\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}] \,\wedge\, \mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]) \text{"}}$$

Definition 2.3

Seien $L, \sigma, k, \ell, \bar{x}, \bar{y}$ wie in Definition 2.2.

(a) Seien Δ und Δ' zwei Mengen von Tupeln $(\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{y}))$ mit $\alpha, \beta \in L[\sigma]$ und $\text{frei}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, $\text{frei}(\beta) \subseteq \{y_1, \dots, y_\ell\}$.

Δ und Δ' heißen äquivalent (kurz: $\Delta \equiv \Delta'$), falls f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und alle $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^\ell$ gilt:

ex. $(\alpha, \beta) \in \Delta$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]$

$\iff$ ex $(\alpha', \beta') \in \Delta'$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta'[\bar{b}]$.

(b) Sei Δ eine Menge von Tupeln (α, β) mit $\alpha, \beta \in L[\sigma]$.

Wir sagen

"die αs in Δ schließen sich gegenseitig aus",

wenn f.a. Tupel $(\alpha_1, \beta_1) \in \Delta$ und $(\alpha_2, \beta_2) \in \Delta$ mit $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$ gilt:
Die Formel $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$ ist unerfüllbar.

Lemma 2.4

Seien $L, \sigma, k, \ell, \bar{x}, \bar{y}$ wie in Definition 2.2.
Bei Eingabe einer nicht-leeren, endlichen Menge Δ von Tupeln $(\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{y}))$ mit $\alpha, \beta \in L[\sigma]$ und $\text{frei}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, $\text{frei}(\beta) \subseteq \{y_1, \dots, y_\ell\}$ kann eine zu Δ äquivalente nicht-leere endliche Menge $\hat{\Delta}$ von Tupeln $(\alpha(\bar{x}), \beta(\bar{y}))$ mit $\alpha, \beta \in L[\sigma]$ und $\text{frei}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, $\text{frei}(\beta) \subseteq \{y_1, \dots, y_\ell\}$ berechnet werden, so dass die αs in $\hat{\Delta}$ sich gegenseitig ausschließen.

Beweis:

Für die gegebene Menge Δ sei

$$\mathbb{A} := \{ \alpha : \text{ex } \beta \text{ s.d. } (\alpha, \beta) \in \Delta \}$$

und für jedes $\alpha \in \mathbb{A}$ sei

$$\mathbb{B}(\alpha) := \{ \beta : (\alpha, \beta) \in \Delta \}.$$

Für jedes $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{A}$ sei

$$\alpha_{\mathbb{J}} := \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{J}} \alpha \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{J}} \neg\alpha$$

und

$$\beta_{\mathbb{J}} := \bigvee_{\alpha \in \mathbb{J}} \bigvee_{\beta \in \mathbb{B}(\alpha)} \beta .$$

Sei $\hat{\Delta} := \{ (\alpha_{\mathbb{J}}, \beta_{\mathbb{J}}) : \emptyset \neq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{A} \}$

Beh 1: Die αs in $\hat{\Delta}$ schließen sich gegenseitig aus.

Beweis: Betrachte zwei verschiedene Tupel $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \hat{\Delta}$.
Gemäß Definition von $\hat{\Delta}$ ex $\emptyset \neq \mathbb{J}_1 \subseteq \mathbb{A}$ und $\emptyset \neq \mathbb{J}_2 \subseteq \mathbb{A}$
mit $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_{\mathbb{J}_1}, \beta_{\mathbb{J}_1})$ und $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_{\mathbb{J}_2}, \beta_{\mathbb{J}_2})$
und $\mathbb{J}_1 \neq \mathbb{J}_2$. Zu zeigen: $\alpha_{\mathbb{J}_1} \wedge \alpha_{\mathbb{J}_2}$ ist unerfüllbar.
Wegen $\mathbb{J}_1 \neq \mathbb{J}_2$ ex $\tilde{\alpha} \in \mathbb{A}$ s.d. $\tilde{\alpha} \in \mathbb{J}_1 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \notin \mathbb{J}_2$. (*)
Gemäß Definition von $\alpha_{\mathbb{J}}$ für $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{A}$ gilt:

$$\alpha_{\mathbb{J}_1} \wedge \alpha_{\mathbb{J}_2} = \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{J}_1} \alpha \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{J}_1} \neg\alpha \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{J}_2} \alpha \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{J}_2} \neg\alpha$$

$$\underset{(*)}{\equiv} \underbrace{\tilde{\alpha} \wedge \neg\tilde{\alpha}}_{\text{ist unerfüllbar}} \wedge \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{J}_1 \cup \mathbb{J}_2} \alpha \wedge \bigwedge_{\alpha \in (\mathbb{A} \setminus \mathbb{J}_1) \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{J}_2)} \neg\alpha$$

somit ist $\alpha_{\mathbb{J}_1} \wedge \alpha_{\mathbb{J}_2}$ unerfüllbar.

$\square$ Beh 1.

Beh 2: $\hat{\Delta} \equiv \Delta$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$ und seien $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^\ell$. Es gilt:

$$\text{ex } (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \hat{\Delta} \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \hat{\alpha}[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \hat{\beta}[\bar{b}]$$

$\overset{\text{Def } \hat{\Delta}}{\iff}$ ex $\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \mathbb{A}$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha_{\mathcal{J}}[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta_{\mathcal{J}}[\bar{b}]$

$\overset{\text{Def } \alpha_{\mathcal{J}}, \beta_{\mathcal{J}}}{\iff}$ ex $\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \mathbb{A}$ s.d.:

1) f.a. $\alpha \in \mathcal{J}$ gilt: $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$ und

2) f.a. $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathcal{J}$ gilt: $\mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}]$ und

3) ex. $\alpha \in \mathcal{J}$, $\beta \in \mathbb{B}(\alpha)$ s.d. $\mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]$

$\iff$ ex. $\alpha \in \mathbb{A}$, $\beta \in \mathbb{B}(\alpha)$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]$

(für "$\Rightarrow$" wähle $\alpha \in \mathcal{J}$ und $\beta \in \mathbb{B}(\alpha)$ gemäß 3);
für "$\Leftarrow$" wähle $\mathcal{J} := \{\alpha' \in \mathbb{A} : \mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}]\}$)

$\overset{\text{Def. } \mathbb{A} \text{ und } \mathbb{B}(\alpha)}{\iff}$ ex $(\alpha, \beta) \in \Delta$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]$.

$\square_{\text{Beh 2}}$

Dies beendet den Beweis von Lemma 2.4.

$\square$

<u>Theorem 2.5</u> (FVZ für FO und FO+MOD)

Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$.
Sei σ eine Signatur.
Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$, seien $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ und $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_\ell)$ $k+\ell$ verschiedene Variablen.
Für jede $L[\sigma_2]$-Formel $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell\}$ gibt es eine FVZ Δ in L von φ bzgl. $(\bar{x}; \bar{y})$.
Und es gibt einen Algorithmus, der Δ bei Eingabe von $(\varphi; \bar{x}; \bar{y})$ berechnet.

<u>Beweis:</u> Per Induktion nach dem Aufbau von φ.

<u>Induktionsanfang:</u> φ ist atomar.

$\boxed{\text{Fall 1:}}$ $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und X und Y kommen nicht in φ vor.

(d.h. φ ist von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$ oder $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ mit $R \in \sigma$, $r = ar(R)$, $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, k\}$).

Setze $\Delta := \{(\varphi, T)\}$ mit $T := \forall z\, z = z$.

Rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl. $(\bar{x}; \bar{y})$ ist:

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$, seien $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^\ell$. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a}, \bar{b}]$$

$$\overset{\text{Form von } \varphi}{\iff} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$$

$$\iff \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models T[\bar{b}]$$

$$\overset{\text{Wahl von } \Delta}{\iff} \quad \text{ex } (\alpha, \beta) \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta[\bar{b}]$$

✓

$\boxed{\text{Fall 2:}}$ $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{y_1, \dots, y_\ell\}$ und X und Y kommen nicht in φ vor.

Setze $\Delta := \{ (\top, \varphi) \}$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ ist.

($\nearrow$ Übung!)

$\boxed{\text{Fall 3:}}$ φ ist von der Form $X(x_i)$ mit $i \in [k]$ oder von der Form $Y(y_j)$ mit $j \in [\ell]$.

Setze $\Delta := \{ (\top, \top) \}$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ ist.

($\nearrow$ Übung!)

$\boxed{\text{Fall 4:}}$ φ ist von der Form $X(y_j)$ mit $j \in [\ell]$ oder von der Form $Y(x_i)$ mit $i \in [k]$.

Setze $\Delta := \{ (\bot, \bot) \}$ mit $\bot := \neg \top$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ ist.

($\nearrow$ Übung!)

$\boxed{\text{Fall 5:}}$ X und Y kommen nicht in φ vor und $\text{frei}(\varphi) \cap \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$ und $\text{frei}(\varphi) \cap \{y_1, \dots, y_\ell\} \neq \emptyset$.

Setze $\Delta := \{ (\bot, \bot) \}$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ ist.

($\nearrow$ Übung!)

Dies beendet den Induktionsanfang.

Induktionsschritt:

$\boxed{\text{Fall 1:}}$ φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Gemäß Induktionsannahme können wir für jedes $i \in \{1,2\}$ eine FVZ Δ_i in L von φ_i bzgl $(\bar{x};\bar{y})$ berechnen.

Setze $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$ ist

$\boxed{\text{Fall 2:}}$ φ ist von der Form $\neg\varphi_1$.

Gemäß Induktionsannahme können wir eine FVZ Δ_1 in L von φ_1 bzgl $(\bar{x};\bar{y})$ berechnen.

Sei $n := |\Delta_1|$ und sei $\Delta_1 = \{(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_n,\beta_n)\}$.

Für jedes $H \subseteq \{1,\ldots,n\}$ sei

$$\alpha_H := \bigwedge_{i\in H} \neg\alpha_i \quad \text{und} \quad \beta_H := \bigwedge_{j\in[n]\setminus H} \neg\beta_j .$$

Setze $\Delta := \{(\alpha_H, \beta_H) : H \subseteq [n]\}$

und rechne nach, dass Δ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$ ist

Seien dazu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$ und sei $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^l$. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \varphi[\bar{a},\bar{b}]$$

$$\iff \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \neg\varphi_1[\bar{a},\bar{b}]$$

$$\underset{\Delta_1 \text{ ist FVZ von } \varphi_1}{\iff} \text{f.a. } (\alpha,\beta) \in \Delta_1 \text{ gilt: } \mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}] \text{ oder } \mathcal{B} \not\models \beta[\bar{b}]$$

$$\underset{(*)}{\iff} \text{ex. } H \subseteq [n] \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha_H[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta_H[\bar{b}]$$

$$\underset{\text{Def } \Delta}{\iff} \text{ex } (\alpha',\beta') \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta'[\bar{b}].$$

Die Äquivalenz (*) ergibt sich hierbei wie folgt:

"$\Longrightarrow$": sei $H := \{ i \in [n] : \mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}] \}$

Dann gilt: $\mathcal{A} \models \alpha_H[\bar{a}]$.

Und für jedes $j \in [n] \setminus H$ gilt: $\mathcal{B} \not\models \beta[\bar{b}]$.

Somit gilt: $\mathcal{B} \models \beta_H[\bar{b}]$.

"$\Longleftarrow$": Betrachte ein beliebiges $(\alpha, \beta) \in \Delta_1$.

Wegen $\Delta_1 = \{ (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \}$ ex. $i \in [n]$ s.d. $(\alpha, \beta) = (\alpha_i, \beta_i)$.

Falls $i \in H$, so gilt wegen $\mathcal{A} \models \alpha_H[\bar{a}]$, dass $\mathcal{A} \not\models \alpha_i[\bar{a}]$

Falls $i \notin H$, so gilt wegen $\mathcal{B} \models \beta_H[\bar{b}]$, dass $\mathcal{B} \not\models \beta_i[\bar{a}]$

Also gilt die Äquivalenz (*).

$\boxed{\text{Fall 3:}}$ φ ist von der Form $\exists z \psi$.

F.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und alle $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^\ell$ gilt:

$$\text{(I)} \begin{cases} & (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \bar{a}, \bar{b}) \models \exists z \psi \\ \iff & (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}, \bar{a}, \bar{b}) \models \left(\exists z (X(z) \wedge \psi) \right) \vee \exists z (Y(z) \wedge \psi)) \end{cases}$$

Gemäß Induktionsannahme können wir berechnen:

- eine FVZ Δ_1 von ψ bzgl. $(\bar{x} z ; \bar{y})$ und
- eine FVZ Δ_2 von ψ bzgl. $(\bar{x} ; \bar{y} z)$

Setze

- $\hat{\Delta}_1 := \{ (\exists z \alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in \Delta_1 \}$ und
- $\hat{\Delta}_2 := \{ (\alpha, \exists z \beta) : (\alpha, \beta) \in \Delta_2 \}$.

<u>Behauptung:</u>

<u>(1)</u> $\hat{\Delta}_1$ ist eine FVZ in L für $\exists z(X(z) \wedge \psi)$ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$

<u>(2)</u> $\hat{\Delta}_2$ ist eine FVZ in L für $\exists z(Y(z) \wedge \psi)$ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$

<u>Beweis:</u> Wir zeigen hier (1), der Beweis von (2) erfolgt analog.

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ beliebige σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$ und sei $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^l$. Dann gilt:

$$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \bar{a}, \bar{b}) \models \exists z(X(z) \wedge \psi)$$

$(\Leftrightarrow)$ ex. $c \in A$ s.d. $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \bar{a}, c, \bar{b}) \models \psi$

Da Δ_1 eine FVZ von ψ bzgl $(\bar{x}z;\bar{y})$ ist, gilt f.a. $c \in A$:

$$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \bar{a}, c, \bar{b}) \models \psi$$

$(\Leftrightarrow)$ ex $(\alpha,\beta) \in \Delta$ s.d. $\mathfrak{A} \models \alpha[\bar{a}, c]$ und $\mathfrak{B} \models \beta[\bar{b}]$

Somit gilt:

$$\text{ex } c \in A \text{ s.d. } (\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}, \bar{a}, c, \bar{b}) \models \psi$$

$(\Leftrightarrow)$ ex $(\alpha,\beta) \in \Delta$, ex $c \in A$ s.d. $\mathfrak{A} \models \alpha[\bar{a}, c]$ und $\mathfrak{B} \models \beta[\bar{b}]$

$(\Leftrightarrow)$ ex. $(\alpha,\beta) \in \Delta$ s.d. $\mathfrak{A} \models (\exists z \alpha)[\bar{a}]$ und $\mathfrak{B} \models \beta[\bar{b}]$

$(\Leftrightarrow)$ ex $(\exists z \alpha, \beta) \in \hat{\Delta}_1$ s.d. $\mathfrak{A} \models (\exists z \alpha)[\bar{a}]$ und $\mathfrak{B} \models \beta[\bar{b}]$.

Somit ist $\hat{\Delta}_1$ eine FVZ für $\exists z(X(z) \wedge \psi)$ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$.

$\square_{\text{Behauptung}}$

Wir wählen $\Delta := \hat{\Delta}_1 \cup \hat{\Delta}_2$.

Unter Beachtung von (I) folgt aus obiger Behauptung leicht, dass Δ eine FVZ für $\exists z \psi$ bzgl $(\bar{x};\bar{y})$ ist.

$\boxed{\text{Fall 4:}}$ φ ist von der Form $\exists^{i_0 \bmod m} z\, \psi$
mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $i_0 \in \{0, \dots, m-1\}$ und $L := \text{FO+MOD}$.
Man sieht leicht, dass gilt:

$$\varphi \equiv \bigvee_{(i_1, i_2) \in I} \Big(\exists^{i_1 \bmod m} z\, (X(z) \wedge \psi) \wedge \exists^{i_2 \bmod m} z\, (Y(z) \wedge \psi) \Big)$$

für $I := \{ (i_1, i_2) \in \{0, \dots, m-1\}^2 : i_1 + i_2 \equiv i_0 \bmod m \}$

Für jedes $i \in \{0, \dots, m-1\}$ sei

$$\chi_i := \exists^{i \bmod m} z\, (X(z) \wedge \psi) \quad \text{und}$$
$$\xi_i := \exists^{i \bmod m} z\, (Y(z) \wedge \psi).$$

Somit ist $\varphi \equiv \bigvee_{(i_1, i_2) \in I} (\chi_{i_1} \wedge \xi_{i_2})$

<u>Behauptung ⊛</u>: Für $i \in \{0, \dots, m-1\}$ kann eine FVZ Δ_{χ_i} von χ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ und eine FVZ Δ_{ξ_i} von ξ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ berechnet werden.

Bevor wir Behauptung ⊛ beweisen, nutzen wir die Aussage, um Fall 4 abzuschließen:
Für $(i_1, i_2) \in I$ ist $\chi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \equiv \neg(\neg \chi_{i_1} \vee \neg \xi_{i_2})$

Durch Kombination der Fälle 1 ("$\vee$") und 2 ("$\neg$") des Induktionsschritts können wir aus $\Delta_{\chi_{i_1}}$ und $\Delta_{\xi_{i_2}}$ eine FVZ $\Delta_{(i_1, i_2)}$ von $\chi_{i_1} \wedge \xi_{i_2}$ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ berechnen.
Dann ist $\Delta := \bigcup_{(i_1, i_2) \in I} \Delta_{(i_1, i_2)}$ eine FVZ von φ bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$.

<u>Beweis von Behauptung ⊛:</u> Sei $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Wir konstruieren hier eine FVZ Δ_{ξ_i} für ξ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ (die Konstruktion von Δ_{χ_i} für χ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ erfolgt analog).

Zur Erinnerung: $\xi_i = \exists^{i \bmod m} z \, (Y(z) \wedge \psi)$.

Gemäß Induktionsannahme können wir eine FVZ Δ von ψ bzgl $(\bar{x}; \bar{y}z)$ konstruieren.
Gemäß Lemma 2.4 können wir o.B.d.A. annehmen, dass sich die αs in Δ gegenseitig ausschließen.

Setze $\Delta' := \{ (\alpha, \exists^{i \bmod m} z \, \beta) : (\alpha, \beta) \in \Delta \}$ und setze

$$\Delta_{\xi_i} := \begin{cases} \Delta' & \text{falls } i \neq 0 \\ \Delta' \cup \{ (\bigwedge_{\alpha \in A} \neg\alpha, \top) \} & \text{falls } i = 0, \end{cases}$$

wobei $A := \{ \alpha : \text{ex } \beta \text{ s.d. } (\alpha, \beta) \in \Delta \}$.

Wir zeigen im Folgenden, dass Δ_{ξ_i} eine FVZ von ξ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$ ist.
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige σ-Strukturen mit $A \cap B = \emptyset$, sei $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^\ell$. Es gilt:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \xi_i[\bar{a}, \bar{b}]$$

$$\iff |\underbrace{\{ c \in B : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}, c] \}}_{=:M}| \equiv i \bmod m$$

Und für jedes $c \in B$ gilt: (da Δ eine FVZ von ψ bzgl $(\bar{x}; \bar{y}z)$ ist):

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}, c]$$

$\overset{\bigtriangledown}{\iff}$ ex. $(\alpha', \beta') \in \Delta$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \beta'[\bar{b}, c]$.

Außerdem wissen wir, dass die αs in Δ sich gegenseitig ausschließen. Daher gilt
entweder: es gibt genau ein $\alpha \in \mathbb{A}$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$
oder: f.a. $\alpha \in \mathbb{A}$ gilt $\mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}]$.

Fall I: Es gibt genau ein $\alpha \in \mathbb{A}$ s.d. $\mathcal{A} \models \alpha[\bar{a}]$.
Für dieses α gibt es gemäß Def. 2.3 (b) genau ein β mit $(\alpha, \beta) \in \Delta$, und es gilt:

$M = \{c \in B : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}, c]\}$

$\overset{\bigtriangledown}{=} \{c \in B : \text{ex. } (\alpha', \beta') \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta'[\bar{b}, c]\}$

$= \{c \in B : \mathcal{B} \models \beta[\bar{b}, c]\}$

Und es gilt:

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \xi_i[\bar{a}, \bar{b}]$

$\iff |M| \equiv i \mod m$

$\iff \mathcal{B} \models \left(\exists^{i \bmod m} z\, \beta\right)[\bar{b}]$

$\iff$ ex $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Delta_{\xi_i}$ s.d. $\mathcal{A} \models \hat{\alpha}[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \hat{\beta}[\bar{b}]$.

Somit ist Δ_{ξ_i} eine FVZ für ξ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$.

Fall II: F.a. $\alpha \in \mathbb{A}$ gilt: $\mathcal{A} \not\models \alpha[\bar{a}]$. D.h.: $\mathcal{A} \models \left(\bigwedge_{\alpha \in \mathbb{A}} \neg\alpha\right)[\bar{a}]$.

Es gilt:

$M = \{ c \in B : \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \psi[\bar{a}, \bar{b}, c] \}$

$\overset{(\nabla)}{=} \{ c \in B : \text{ ex } (\alpha', \beta') \in \Delta \text{ s.d. } \mathcal{A} \models \alpha'[\bar{a}] \text{ und } \mathcal{B} \models \beta'[\bar{b}] \}$

$\underset{\text{Fall II}}{=} \emptyset .$

Und es gilt:

$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \models \xi_i [\bar{a}, \bar{b}]$

$\iff i = 0$

$\iff \Delta_{\xi_i}$ enthält das Tupel $\left(\bigwedge_{\alpha \in A} \neg \alpha , \top \right)$

$\iff$ ex. $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \in \Delta_{\xi_i}$ s.d. $\mathcal{A} \models \hat{\alpha}[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \models \hat{\beta}[\bar{b}]$.

Somit ist Δ_{ξ_i} eine FVZ für ξ_i bzgl $(\bar{x}; \bar{y})$.

$\square$ Behauptung $\circledast$.

Dies beendet den Beweis von Fall 4 des Induktionsschritts, und es beendet insgesamt den Beweis von Theorem 2.5

$\square$

Korollar 2.6

Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$. Sei σ eine Signatur.
Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, y $k+1$ verschiedene Variablen.
Bei Eingabe einer Zahl $r \in \mathbb{N}$ und einer r-lokalen $L[\sigma]$-Formel $\lambda(\bar{x}, y)$ mit $\text{frei}(\lambda) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k, y\}$ kann eine endliche, nicht-leere Menge Δ' von Paaren $(\alpha'(\bar{x}), \beta'(y))$ von r-lokalen $L[\sigma]$-Formeln berechnet werden, s.d. gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \text{dist}(x_i, y) > 2r+1 \quad \wedge \quad \lambda(\bar{x}, y)$$

$$\equiv \quad \bigwedge_{i=1}^{k} \text{dist}(x_i, y) > 2r+1 \quad \wedge \bigvee_{(\alpha', \beta') \in \Delta'} \left(\alpha'(\bar{x}) \wedge \beta'(y) \right)$$

<u>Beweis:</u> folgt leicht aus Theorem 2.5.
Details: Übung! $\square$