3.7 Der Satz von Fraïssé

Die Charakterisierung der m-Äquivalenz durch EF-Spiele ist eine gute Sichtweise, um Beweisideen zu finden, indem man nach einer Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel sucht. Um Nichtausdrückbarkeitsbeweise exakt aufschreiben zu können, ist die im Folgenden vorgestellte Charakterisierung von Fraïssé sehr elegant.

Definition 3.37 $(\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$

(a) Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen, so bezeichnet $\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Menge aller partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

(b) Wir schreiben $p: a_1, \ldots, a_k \mapsto b_1, \ldots, b_k$ um die Abbildung p mit $\mathrm{Def}(p) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $p(a_i) = b_i$ f.a. $i \in \{1, \ldots, k\}$ zu bezeichnen.

(c) Oft identifizieren wir eine Abbildung p mit ihrem Graph $\{(a, p(a)) : a \in \mathrm{Def}(p)\}$.
Insbes. bedeutet $p \subseteq q$, dass q eine Erweiterung von p ist, d.h. $\mathrm{Def}(p) \subseteq \mathrm{Def}(q)$ und $p(a) \stackrel{!}{=} q(a)$ f.a. $a \in \mathrm{Def}(p)$.

~~$p(a) = q(a)$ f.a. $a \in Def(p)$.~~

~~**Definition 3.34** ($W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$)~~

~~Sei σ eine Funktionen-freie Signatur. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, und sei $m \in \mathbb{N}$. Die Menge $W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ aller *Gewinnpositionen für Duplicator* besteht aus allen Abbildungen~~

~~$$p : \vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma},$$~~

~~für die $\vec{a}' = a_1',\dots,a_k' \in A$, $\vec{b}' = b_1',\dots,b_k' \in B$, $k \in \mathbb{N}$, so dass Duplicator das Spiel $G_m(\mathfrak{A},\vec{a}',\mathfrak{B},\vec{b}')$ gewinnt.~~

Definition 3.38 (Hin-und-Her-System; m-Isomorphie)

Sei σ eine relationale Signatur und sei $m \in \mathbb{N}$.

Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *m-isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), falls es eine Folge $(I_j)_{j=0,\dots,m}$ mit den folgenden 3 Eigenschaften gibt:

(1) Für jedes $j \in \{0,\dots,m\}$ ist $\emptyset \neq I_j \subseteq Part(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$
(d.h. I_j ist eine nicht-leere Menge partieller Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$)

(2) "*Hin-Eigenschaft*": Für jedes $j<m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $a \in A$ gibt es ein $q \in I_j$ s.d. $q \supseteq p$ und $a \in Def(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von p, in

deren Definitionsbereich a liegt).

(3) "<u>Her-Eigenschaft</u>": Für jedes $j<m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $b \in B$ gibt es ein $q \in I_j$, so dass $q \supseteq p$ und $b \in \text{Bild}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von p, in deren Bild b liegt).

Falls $(I_j)_{j \leq m}$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, so nennen wir $(I_j)_{j \leq m}$ ein <u>Hin-und Her-System</u> (der Ordnung m), schreiben $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und sagen <u>$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind m-isomorph vermöge $(I_j)_{j \leq m}$</u>.

Anschaulich bedenten die Bedingungen (2) und (3) folgendes: In I_{j+1} liegen nur solche partiellen Isomorphismen p, die sich $(j+1)$-mal erweitern lassen. Die Erweiterungen $p_j, p_{j-1}, \ldots, p_0$, die man dabei nacheinander erhält, sind allesamt partielle Isomorphismen, die in den Mengen $I_j, I_{j-1}, \ldots, I_0$ liegen.

Der folgende Satz besagt, dass zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau dann m-isomorph sind, wenn Duplicator das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewinnt. Zur Formulierung des Satzes brauchen wir noch folgende Definition:

Definition 3.39 ($W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$)

Sei σ eine relationale Signatur.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, und es sei $m \in \mathbb{N}$.

Die Menge $W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ aller

Gewinnpositionen für Duplicator besteht aus

allen Abbildungen

$$p: a_1,\dots,a_k \mapsto b_1,\dots,b_k,$$

für die $k \in \mathbb{N}$, $\bar{a} = a_1,\dots,a_k \in A$, $\bar{b} = b_1,\dots,b_k \in B$,

so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A},\bar{a})$ und $(\mathfrak{B},\bar{b})$ hat.

Satz 3.40

Sei σ eine endliche relationale Signatur.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$,
$\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$.
Dann sind äquivalent:

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ und $(\mathfrak{B}, \bar{b})$

(b) $\left(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\right)_{j \le m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$\left(a_1, \dots, a_k \mapsto b_1, \dots, b_k\right) \in W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

(c) Es gibt $(I_j)_{j \le m}$, so dass $(I_j)_{j \le m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$(a_1, \dots, a_k \mapsto b_1, \dots, b_k) \in I_m.$$

Beweis:

"(a) $\Rightarrow$ (b)": Gilt gemäß der Definition der Menge $W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ der Gewinnpositionen für Duplicator.

"(b) $\Rightarrow$ (c)": Gilt mit $(I_j)_{j \le m} := \left(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\right)_{j \le m}$.

"$(c) \Rightarrow (a)$": Gemäß Voraussetzung gibt es $(I_j)_{j\leq m}$, so dass $(I_j)_{j\leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$(a_1,\dots,a_k \mapsto b_1,\dots,b_k) \in I_m.$$

Per Induktion nach i zeigen wir, dass Duplicator $(I_j)_{j\leq m}$ nutzen kann, um das Spiel $EF_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ so zu spielen, dass für jedes $i \in \{0,\dots,m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a_{k+1},\dots,a_{k+i}$ bzw. $b_{k+1},\dots,b_{k+i}$ die in den Runden $1,\dots,i$ in A bzw B gewählten Elemente, so gibt es einen partiellen Isomorphismus $p \in I_{m-i}$, so dass $a_1,\dots,a_k, a_{k+1},\dots,a_{k+i} \in Def(p)$ und

$$p(a_j) = b_j \quad \text{für alle } j \in \{1,\dots,k+i\}.$$

$\underline{i=0}$: $(*)_0$ gilt, da $(a_1,\dots,a_k \mapsto b_1,\dots,b_k) \in I_m$

$\underline{i \to i+1}$: Sei p der partielle Isomorphismus aus I_{m-i}, der gemäß Induktionsannahme $(*)_i$ existiert.

$\underline{\text{Fall 1}}$: Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $a_{k+i+1} \in A$

Gemäß der "Hin-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in I_{m-i-1}, in deren Definitionsbereich a_{k+i+1} liegt

Duplicator kann in Runde $i+1$ daher mit $b_{k+i+1} = q(a_{k+i+1})$ antworten und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt.

<u>Fall 2:</u> Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $b_{k+i+1} \in B$.

Gemäß der "Her-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in I_{m-i-1}, in deren Bild b_{k+i+1} liegt.

Duplicator kann daher mit einem a_{k+i+1} antworten, für das $q(a_{k+i+1}) = b_{k+i+1}$ gilt, und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt. $\square$

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht und Satz 3.40 erhalten wir:

<u>Korollar 3.41</u>

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

Äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ (d.h. Dupl. gewinnt das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$)

(b) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$

(c) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

(d) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}}$

Die Äquivalenz von (b) und (c), d.h.

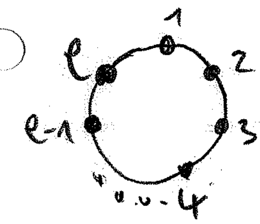
$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

ist als "<u>Satz von Fraïssé</u>" bekannt.

Beispiel 3.42

Die Verwendung des Satzes von Fraïssé liefert einen alternativen Beweis von Satz 3.28 (a):
"Graph-Zusammenhang ist nicht FO-definierbar"

Beweis: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei G_ℓ ein ungerichteter Kreis der Länge ℓ, d.h. G_ℓ hat Knotenmenge $\{1,\dots,\ell\}$ und Kantenmenge



$$E^{G_\ell} := \{(i,i+1) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(\ell,1)\}$$
$$\cup \{(i+1,i) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(1,\ell)\}.$$

Für $\ell, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $G_{\ell,k}$ die disjunkte Vereinigung von G_ℓ und G_k, d.h. $G_{\ell,k}$ besteht aus zwei ungerichteten Kreisen der Längen ℓ und k.

Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle ℓ, k mit $\ell, k > 2^m$ gilt: $G_\ell \equiv_m G_{\ell,k}$.

Dazu sei für jedes $j \in \{0,\dots,m\}$ I_j die Menge aller partiellen Isomorphismen p von G_ℓ nach $G_{\ell,k}$, für die gilt:

- $|Def(p)| \leq m-j$ und
- für alle $a, a' \in Def(p)$ gilt:
  $Dist^{G_\ell}(a,a') = Dist^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a'))$ oder
  $Dist^{G_\ell}(a,a'),\ Dist^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a')) \geq 2^{j+1}$.

<u>Beachte:</u> I_m besteht gerade aus der Abbildung "$\emptyset$", deren Definitionsbereich leer ist.

Per Induktion kann man leicht nachweisen, dass I_j für jedes $j \in \{m, m-1, \dots, 0\}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat und dass $I_j \neq \emptyset$ ist.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$(I_j)_{j \leq m} : G_\ell \cong_m G_{\ell,k}$, d.h.

G_ℓ und $G_{\ell,k}$ sind m-isomorph.

Gemäß Satz von Fraïssé gilt daher f.a. $m \in \mathbb{N}$ und alle k, ℓ mit $k, \ell > 2^m$, dass $G_\ell \equiv_m G_{\ell,k}$.

Da G_ℓ zusammenhängend ist, $G_{\ell,k}$ aber nicht, folgt, dass Graph-Zusammenhang nicht FO-definierbar ist. $\square$