

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 10

Zu bearbeiten bis 11. Juli 2023

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 4.26, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Sei $k \geq 1$ und seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$ und $m \geq 0$ mit $m \leq \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathcal{A} \equiv_{L_{\infty\omega}^k} \mathcal{B}$.

Aufgabe 2: (5 · 5 = 25 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.
- (b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.
- (c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.
- (d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.
- (e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Aufgabe 3: (8 + 8 + 9 = 25 Punkte)

Sei $\sigma = \{E\}$. Erläutern Sie jeweils, weshalb Ihre Formel das Gewünschte leistet.

- (a) Geben Sie einen LFP[σ]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.
Hinweis: Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.
- (b) Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$ auf einstellige Relationen R beschränken. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Geben Sie eine MLFP[$<$]-Formel $\varphi_m(x)$ an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von x ein Vielfaches von m ist.
- (c) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird vom folgenden LFP[σ]-Satz φ definiert?

$$\varphi := \forall x \left[\mathbf{lfp}_{P,x} \forall y \left(P(y) \vee \neg E(y, x) \right) \right](x).$$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 5.15, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur σ , jede LFP[σ]-Formel $\varphi(R, \vec{x})$, die positiv in R ist, und jede σ -Struktur \mathcal{A} gilt: $F_{\varphi, \mathcal{A}}$ ist monoton.