

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 4. Juli 2023

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie Teil (a) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ , für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $F \subseteq \Delta_{\ell+1}^\sigma$ gilt:

$$\mu(\text{EA}_{\ell,F} \mid \text{ALL}(\sigma)) = 1.$$

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ , jedes $k \geq 1$ und alle σ -Strukturen \mathcal{A}, \mathcal{B} , die jedes Erweiterungsaxiom $\text{EA}_{\ell,F}$ mit $\ell \leq k$ und $F \subseteq \Delta_{\ell+1}^\sigma$ erfüllen, gilt: \mathcal{A} und \mathcal{B} erfüllen die gleichen FO[σ]-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 4.24, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im k -Pebble Spiel auf (\mathcal{A}, \vec{a}) und (\mathcal{B}, \vec{b}) hat, wenn $(\mathcal{A}, \vec{a}) \equiv_{L_{\infty\omega}^k} (\mathcal{B}, \vec{b})$ gilt.

Aufgabe 4: (10 + 15 = 25 Punkte)

Sei $\sigma = \{E\}$. Sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

- (a) Zeigen Sie, dass Conn nicht $L_{\infty\omega}^2[\sigma]$ -definierbar in UGraphs ist.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Conn ist $L_{\infty\omega}^\omega[\sigma]$ -definierbar in UGraphs.