

# Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

## Übungsblatt 9

*Zu bearbeiten bis 4. Juli 2023*

### Aufgabe 1: (25 Punkte)

Beweisen Sie Teil (a) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur  $\sigma$ , für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  und alle  $F \subseteq \Delta_{\ell+1}^\sigma$  gilt:

$$\mu(\text{EA}_{\ell,F} \mid \text{ALL}(\sigma)) = 1.$$

### Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 4.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur  $\sigma$ , jedes  $k \geq 1$  und alle  $\sigma$ -Strukturen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ , die jedes Erweiterungsaxiom  $\text{EA}_{\ell,F}$  mit  $\ell \leq k$  und  $F \subseteq \Delta_{\ell+1}^\sigma$  erfüllen, gilt:  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  erfüllen die gleichen FO[ $\sigma$ ]-Sätze vom Quantorenrang  $\leq k$ .

### Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 4.24, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im  $k$ -Pebble Spiel auf  $(\mathcal{A}, \vec{a})$  und  $(\mathcal{B}, \vec{b})$  hat, wenn  $(\mathcal{A}, \vec{a}) \equiv_{L_{\infty\omega}^k} (\mathcal{B}, \vec{b})$  gilt.

### Aufgabe 4: (10 + 15 = 25 Punkte)

Sei  $\sigma = \{E\}$ . Sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

- (a) Zeigen Sie, dass Conn nicht  $L_{\infty\omega}^2[\sigma]$ -definierbar in UGraphs ist.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Conn ist  $L_{\infty\omega}^\omega[\sigma]$ -definierbar in UGraphs.