Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Juni 2023

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 27. Juni 2023

Aufgabe 1: **($15 + 10 = 25$ Punkte)**

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei σ_k die Signatur mit k unären Relationssymbolen $P_1, \dots, P_k$. Für jede σ_k-Struktur $\mathcal{A}$ und jedes $a \in A$ sei $\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \subseteq \sigma_k$ definiert als

$$\text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) \ := \ \{P_i \ : \ i \in \{1, \dots, k\}, \ \ a \in P_i^{\mathcal{A}}\}.$$

Für jede Farbe $F \subseteq \sigma_k$ sei

$$M_F^{\mathcal{A}} \ := \ \{a \in A \ : \ \text{Farbe}^{\mathcal{A}}(a) = F\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle σ_k-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt:
Wenn für alle Farben $F \subseteq \sigma_k$ gilt, dass

$$|M_F^{\mathcal{A}}| = |M_F^{\mathcal{B}}| \quad \text{oder} \quad |M_F^{\mathcal{A}}|, |M_F^{\mathcal{B}}| \geqslant 2^m,$$

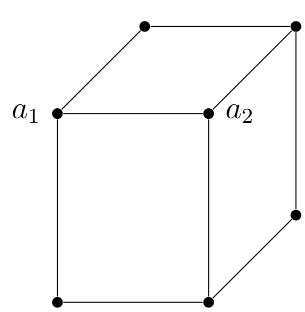
dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Der Begriff "m-Runden MSO-Spiel" bezieht sich hier auf die Lösung von Aufgabe 4 auf Blatt 6.

(b) Folgern Sie, dass es für jeden MSO$[\sigma_k]$-Satz einen auf der Klasse aller σ_k-Strukturen äquivalenten FO$[\sigma_k]$-Satz gibt.

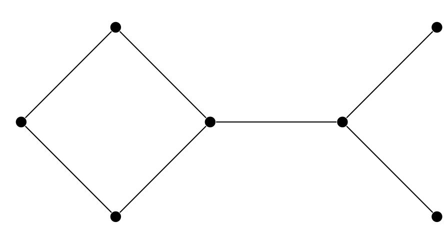
Aufgabe 2: **($2 + 10 + 10 = 22$ Punkte)**

Betrachten Sie die $\{E\}$-Strukturen $\mathcal{A} := (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} := (B, E^{\mathcal{B}})$, die durch folgende Skizze dargestellt werden, wobei jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u, v) und (v, u) repräsentieren:

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



(a) Finden Sie $b_1, b_2 \in B$, so dass $(a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2) \in \mathrm{Part}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

(b) Was ist das größte m, so dass es $b_1, b_2 \in B$ mit $(\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ gibt ? Belegen Sie Ihre Aussage, indem Sie für Ihre Zahl m geeignete Elemente $b_1, b_2 \in B$ und ein Hin- und Her-System $(I_j)_{j \leqslant m} \colon (\mathcal{A}, a_1, a_2) \cong_m (\mathcal{B}, b_1, b_2)$ angeben.

(c) Beweisen Sie, dass ein größeres als das von Ihnen angegebene m nicht möglich ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Berechnen Sie die asymptotische Wahrscheinlichkeit $\mu(\mathrm{P} \mid \mathrm{UG})$ für die Klasse P aller planaren ungerichteten Graphen.

Aufgabe 4: **($4 \cdot 7 = 28$ Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

(a) $\mathrm{FO}[\sigma_{\{a,b\}}]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller Wortstrukturen $\mathcal{A}_w$ mit $w \in \{a, b\}^+$.

(b) $\mathrm{MSO}[\{\leqslant\}]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.

(c) $\mathrm{FO}[\{\leqslant\}]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.

(d) Es gibt eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse S von ungerichteten Graphen, so dass $\mathrm{FO}[\{E\}]$ kein 0-1-Gesetz bezüglich S besitzt.