Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13. Juni 2023

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 7

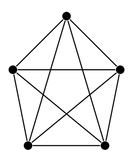
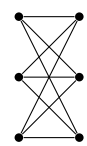
Zu bearbeiten bis 20. Juni 2023

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keinen FO[$\{E\}$]-Satz φ gibt, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen G und den zu G gehörenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ gilt:

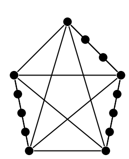
$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad G \text{ ist planar.}$$

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

$K_5 :=$  $K_{3,3} :=$ 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5



Aufgabe 2: (25 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse C $\subseteq$ S gilt: [1]

$$\text{C ist FO-definierbar in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist Hanf-lokal in S.}$$

Gilt auch die Umkehrung? D.h. gilt für jede Klasse S von σ-Strukturen und jede Klasse C $\subseteq$ S:

$$\text{C ist Hanf-lokal in S} \quad \Rightarrow \quad \text{C ist FO-definierbar in S ?}$$

Belegen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder beweisen, dass die Umkehrung gilt, oder indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

[1] Wir sagen "C ist FO definierbar in S", falls es einen FO[σ]-Satz φ gibt, s.d. f.a. $\mathcal{A} \in$ S gilt: $\mathcal{A} \in$ C $\iff$ $\mathcal{A} \models \varphi$

Aufgabe 3: **($2 \cdot 25 = 50$ Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$.

(a) Gibt es eine EMSO$[\sigma]$-Formel $\varphi(x, y)$, so dass für alle ungerichteten endlichen Graphen $G = (V^G, E^G)$, die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ und für alle Knoten $a, b \in V^G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \varphi[a, b] \quad \iff \quad \text{in } G \text{ gibt es einen Weg von Knoten } a \text{ zu Knoten } b\ ?$$

(b) Gibt es einen EMSO$[\sigma]$-Satz ψ, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $G = (V^G, E^G)$ und die zugehörige σ-Struktur $\mathcal{A}_G$ gilt:

$$\mathcal{A}_G \models \psi \quad \iff \quad \text{Jeder Knoten von } G \text{ hat einen geraden Grad ?}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antworten korrekt sind.