Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Mai 2023

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 6. Juni 2023

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Korollar 3.16(b), d.h. zeigen Sie:

Für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

> Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit freien Variablen aus $x_1, \ldots, x_k$ und Quantorentiefe $\leqslant m$.

Geben Sie eine möglichst kleine obere Schranke $f(\sigma, k, m)$ für die Anzahl der verschiedenen, paarweise nicht äquivalenten Formeln an.

Aufgabe 2: **($15 + 10 = 25$ Punkte)**

Sei $\sigma := \{S_v, S_h\}$, wobei S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten) zweistellige Relationssymbole seien.

Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k \times \ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \;:\; 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \;:\; 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \Big\}. \end{aligned}$$

(a) Seien $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Geben Sie zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ an, sodass $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \cong \mathcal{G}_{k,\ell}$.

(b) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.22 aus, das heißt, zeigen Sie, dass es keinen FO[σ]-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Aufgabe 3: **($10 + 15 = 25$ Punkte)**

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in der jedes Blatt gerade Höhe hat. Zeigen Sie, dass es keinen FO[τ_Σ]-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörige τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ gilt:

$$t \in L \quad \iff \quad \mathcal{A}_t \models \varphi$$

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

(b) Für jedes Alphabet Σ sei $\tau'_\Sigma := \tau_\Sigma \cup \{\text{desc}\}$, wobei desc ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ ist eine Erweiterung der τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ um die Relation $\text{desc}^{\mathcal{B}_t}$, wobei

$$(u,v) \in \text{desc}^{\mathcal{B}_t} \quad\iff\quad v \text{ ist ein Nachkomme von } u.$$

Dabei ist $v \in B_t$ ein Nachkomme von $u \in B_t$ genau dann, wenn es einen Weg der Länge $\geqslant 1$ von u nach v in dem Graphen $(B_t, E_1^{\mathcal{B}_t} \cup E_2^{\mathcal{B}_t})$ gibt. Zeigen Sie, dass es einen FO$[\tau'_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörende τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ gilt:

$$t \in L \quad\iff\quad \mathcal{B}_t \models \varphi$$

wobei L die Baumsprache aus **(a)** ist.

Aufgabe 4: (10 + 15 = 25 Punkte)

Sei σ eine endliche relationale Signatur.

(a) Definieren Sie Spielregeln und Gewinnbedingung eines *m-Runden* MSO-*Spiels*, so dass für alle $m \geqslant 0$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt einen MSO$[\sigma]$-Satz Φ vom Quantorenrang $\text{qr}(\Phi) \leqslant m$, so dass $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \not\models \Phi$.

(ii) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Aussagen **(i)** und **(ii)** äquivalent sind.