Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 23. Mai 2023

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis 30. Mai 2023

Bemerkung: Die Aufgaben 1 und 2 ergeben zusammen einen Beweis des Satzes von Grädel („ESO-HORN beschreibt P auf $\textsc{Fin}_<$“).

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Problem $\text{Eval}_{\textsc{Fin}}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz Φ in P liegt, d.h. es gibt einen deterministischen Algorithmus, der bei Eingabe einer endlichen Struktur $\mathcal{A}$ in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathcal{A} \models \Phi$.

Zur Erinnerung: In der Vorlesung *Logik in der Informatik* wurde gezeigt, dass das Problem

> HORN-SAT
>
> *Eingabe:* Eine Konjunktion α von aussagenlogischen Horn-Klauseln.
>
> *Frage:* Ist α erfüllbar?

unter Verwendung des Streichungsalgorithmus deterministisch in Polynomialzeit gelöst werden kann.

Aufgabe 2: (35 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede endliche, funktionenfreie Signatur σ, die das zweistellige Relationssymbol $<$ enthält, und jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse $\mathcal{C}$ von endlichen geordneten σ-Strukturen gilt: Falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die bei Eingabe einer endlichen geordneten σ-Struktur $\mathcal{A}$ (repräsentiert durch $\text{enc}_{<^\mathcal{A}}(\mathcal{A})$) in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, dann gibt es auch einen ESO-HORN$[\sigma]$-Satz Φ, sodass für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \Phi \iff \mathcal{A} \in \mathcal{C}$.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung “$\Longrightarrow$” von Satz 3.7, d.h. zeigen Sie:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^\mathcal{A}$ und $\leqslant^\mathcal{B}$ sind.

Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.