Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. Mai 2023

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 4v2

Zu bearbeiten bis 23. Mai 2023

Bemerkung: In Kombination von Aufgabe 1 diesen Blattes und Aufgabe 4 des vorigen wird der Satz von Doner (1970), Thatcher und Wright (1968) gezeigt, der Folgendes besagt:

> Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet und sei $L \subseteq T_\Sigma$ eine Baumsprache.
> Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
>
> **(a)** L ist regulär.
>
> **(b)** L ist EMSO-definierbar.
>
> **(c)** L ist MSO-definierbar.

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei Σ ein (nicht-leeres) endliches Alphabet.
Zeigen Sie: Jede MSO-definierbare Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ ist regulär.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Die *Höhe* eines Σ-Baumes ist die maximale Höhe seiner Blätter, d.h. die maximale Anzahl von Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen *gerader* Höhe besteht.

Zeigen Sie, dass L nicht MSO-definierbar ist.

Aufgabe 3: **(20 + 5 = 25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur. Im Beweis von Theorem 2.24 wird gezeigt, wie man zu einem ESO[σ]-Satz Φ und einer endlichen σ-Struktur $\mathcal{A}$ eine aussagenlogische Formel $\alpha_{\Phi,\mathcal{A}}$ konstruiert, für die gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \iff \quad \alpha_{\Phi,\mathcal{A}} \text{ hat eine erfüllende Belegung.}$$

(a) Konstruieren Sie $\alpha_{\Phi,\mathcal{A}}$ für den ESO[E]-Satz

$$\Phi := \exists X \Big(\exists x X(x) \ \wedge \ \exists y \neg X(y) \ \wedge \ \forall u \forall v \big((X(u) \ \wedge \ \neg X(v)) \ \rightarrow \ (\neg E(u,v) \ \wedge \ \neg E(v,u)) \big) \Big)$$

und die $\{E\}$-Struktur

$$\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}}) \quad \text{mit} \quad A = \{1,2,3\} \quad \text{und} \quad E^{\mathfrak{A}} = \{(1,2),(3,3)\}.$$

(b) Hat die im Teil **(a)** konstruierte Formel $\alpha_{\Phi,\mathcal{A}}$ eine erfüllende Belegung? Falls ja, geben Sie eine solche Belegung an; falls nein, begründen Sie, warum es keine solche Belegung gibt.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4:

Auf ein späteres Blatt verschoben.