

Logik und Komplexität

Sommersemester 2023

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis 9. Mai 2023

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Beweisen Sie folgende Verschärfung des Satzes von Trakhtenbrot:

Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$ die Signatur, die aus einem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Das endliche Erfüllbarkeitsproblem für $\text{FO}[\sigma_{\text{Graph}}]$ ist unentscheidbar.

Hinweis: Verwenden Sie dazu Aufgabe 2 auf Blatt 1. Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von Strukturen über einer binären Signatur σ durch gerichtete Graphen (d.h. $\{E\}$ -Strukturen).

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält, sei $r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei R ein r -stelliges Relationssymbol mit $R \notin \sigma$.

Eine $\text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ -Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$ heißt *im Endlichen monoton in R* , wenn für alle endlichen σ -Strukturen \mathcal{A} und alle Relationen $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq A^r$ gilt:

$$\text{Falls } R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}, \text{ so } \llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket^{(\mathcal{A}, R_1^{\mathcal{A}})} \subseteq \llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket^{(\mathcal{A}, R_2^{\mathcal{A}})},$$

wobei $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket^{(\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}})} := \{\bar{a} \in A^r : (\mathcal{A}, R_i^{\mathcal{A}}) \models \varphi[\bar{a}]\}$.

Beweisen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

MONOTONIE IM ENDLICHEN:

Eingabe: Eine $\text{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$ -Formel $\varphi(\bar{x})$.

Frage: Ist $\varphi(\bar{x})$ im Endlichen monoton in R ?

Hinweis: Benutzen Sie die in Aufgabe 1 bewiesene Version des Satzes von Trakhtenbrot.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3:**(12 + 12 + 12 = 36 Punkte)**

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

- (a) Was drückt der folgende Satz in einem ungerichteten Graphen aus?

$$\forall X \left(\left(\exists x X(x) \wedge \exists x \neg X(x) \right) \rightarrow \exists x \exists y \left(X(x) \wedge E(x, y) \wedge \neg X(y) \right) \right)$$

- (b) Geben Sie einen MSO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G ein Baum ist.
- (c) Geben Sie einen ESO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G eine gerade Anzahl an Zusammenhangskomponenten enthält.

Aufgabe 4:**(14 Punkte)**

Hinweis: Die für diese Aufgabe nötigen Definitionen zu Baumautomaten und regulären Baumsprachen finden Sie auf der Rückseite von Blatt 1 und am Ende des Blattes.

Sei L die Baumsprache aus Aufgabe 3 von Blatt 1. Zeigen Sie, dass L MSO-definierbar ist.

Definitionen

Σ -Bäume und Logik. Zur Repräsentation von Σ -Bäumen durch logische Strukturen nutzen wir die Signatur $\tau_{\Sigma} := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$, wobei E_1 und E_2 2-stellige und alle P_a 1-stellige Relationssymbole sind. Ist t ein Σ -Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ , so repräsentieren wir t durch die τ_{Σ} -Struktur \mathcal{A}_t mit dem Universum $V(t)$ und den Relationen $E_i^{\mathcal{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1, 2\}$) und $P_a^{\mathcal{A}_t} := \{v \in V(t) : \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$). Ein SO[τ_{Σ}]-Satz φ beschreibt eine Baumsprache L , wenn gilt: $L = \{t \in T_{\Sigma} : \mathcal{A}_t \models \varphi\}$. Eine Baumsprache $L \subseteq T_{\Sigma}$ heißt *MSO-definierbar*, wenn es einen MSO[τ_{Σ}]-Satz gibt, der L beschreibt.