Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

3. Juli 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 10. Juli 2023, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x) \quad := \quad \neg\,\exists y\,\forall z\,\Big(E(y,z) \to \big(E(x,z) \wedge \exists x\,E(x,x)\big)\Big)$$

(i) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Negationsnormalform.

(ii) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Pränex-Normalform.

Gehen Sie hierbei in nachvollziehbaren Schritten, ähnlich wie in Beispiel 3.70 vor.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

Betrachten Sie das Alphabet $A = \{\mathtt{M}, \mathtt{I}, \mathtt{U}\}$ und die Menge $M := A^*$.

Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül über M, der aus den folgenden Regeln besteht:

- $\mathfrak{K}$ enthält das Axiom

$$\frac{}{\mathtt{MI}}$$

- Für alle $w, w' \in A^*$ enthält $\mathfrak{K}$ die Regeln

$$\frac{w\mathtt{I}}{w\mathtt{IU}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathtt{M}w}{\mathtt{M}ww} \quad \text{und} \quad \frac{w\mathtt{III}w'}{w\mathtt{U}w'} \quad \text{und} \quad \frac{w\mathtt{UU}w'}{ww'}$$

(a) Geben Sie eine rekursive Definition der Menge $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}$ an.

(b) Welche der folgenden Worte sind aus $\mathfrak{K}$ ableitbar, welche nicht? Begünden Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder ein Ableitung des Wortes in $\mathfrak{K}$ angeben oder erläutern, warum es keine solche Ableitung geben kann.

(i) $\mathtt{MIU}$

(ii) $\mathtt{UMII}$

(iii) $\mathtt{MUII}$

(iv) $\mathtt{MU}$

(c) Beweisen Sie durch Nutzen des Induktionsprinzips, dass für jedes Wort $w \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}$ gilt:

Die Anzahl $|w|_{\mathtt{I}}$ der Vorkommen des Buchstabens $\mathtt{I}$ in w ist *nicht* durch 3 teilbar.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur, sei $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$, seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und seien $x, y \in \mathsf{VAR}$.

Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregeln:

(a) $\wedge$-Einführung im Sukzedens $(\wedge S)$:

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \quad \varphi \\ \Gamma \vdash \quad \psi \end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

(b) $\exists$-Einführung im Antezedens $(\exists A)$:

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \qquad \text{falls } \ y \notin \mathrm{frei}(\Gamma,\, \exists x\varphi,\, \psi)$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, wobei σ eine Signatur ist, die ein 1-stelliges Relationssymbol P enthält. Seien x und y zwei verschiedene Variablen. Leiten Sie ähnlich wie in Beispiel 4.19 aus dem Skript die folgenden beiden Sequenzen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab.

(a) $\varphi,\ (\neg\varphi \vee \psi)\ \vdash\ \psi$

(b) $P(x), \forall x \forall y\, x{=}y \vdash \forall y\, P(y)$