Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

26. Juni 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

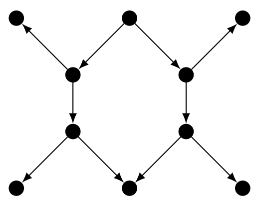
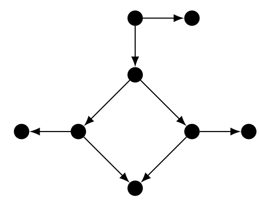
Sommersemester 2023

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 3. Juli 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (40 Punkte)

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Betrachten Sie die folgenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$:  $\mathcal{B}$: 

(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.

(b) Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil (a) einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe m, so dass $\mathcal{A} \models \psi$ und $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

(c) Welche der beiden folgenden Aussagen ist für jede Signatur σ und jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ korrekt, welche nicht? Beweisen Sie, dass ihre Antworten korrekt sind.

(i) $\exists x\, \forall y\, \varphi \;\models\; \forall y\, \exists x\, \varphi$ **(ii)** $\forall y\, \exists x\, \varphi \;\models\; \exists x\, \forall y\, \varphi$

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Sei $\mathsf{3\text{-}COL}$ die Klasse aller gerichteten dreifärbbaren Graphen, d.h. aller $\{E/2\}$-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

> Es gibt eine Funktion $f : A \to \{\mathit{rot}, \mathit{gelb}, \mathit{blau}\}$, so dass für jede Kante (a, b) in $E^{\mathcal{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

Zeigen Sie: Die Klasse $\mathsf{3\text{-}COL}$ ist *nicht FO-definierbar*.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(35 Punkte)**

Sei $\sigma = \{\leqslant\}$ und $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

- $\mathcal{A}$ ist eine *dichte* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und es zwischen je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} b$ ein $c \in A$ mit $a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b$ gibt.
- $\mathcal{A}$ ist eine *lokal endliche* lineare Ordnung, wenn $\leqslant^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und für alle $a, b \in A$ die Menge $\{c \mid a <^{\mathcal{A}} c <^{\mathcal{A}} b\}$ endlich ist.

(Wir verwenden hier $a <^{\mathcal{A}} b$ als Abkürzung für „$a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ und $a \neq b$". Wie in der Vorlesung dürfen Sie in Formeln $x < y$ als Abkürzung für $(x \leqslant y \wedge \neg\, x{=}y)$ verwenden.)

(a) Geben Sie eine dichte lineare Ordnung $\mathcal{A}$ und eine lokal endliche, lineare Ordnung $\mathcal{B}$ an.

(b) Geben Sie eine lineare Ordnung $\mathcal{C}$ an, die weder dicht noch lokal endlich ist. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(c) Die Klasse aller dichten linearen Ordnungen ist FO-definierbar.

(d) Die Klasse aller lokal endlichen linearen Ordnungen ist FO-definierbar.