Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux 19. Juni 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 26. Juni 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Eine stabile Menge (auch *unabhängige Menge*) der Größe k in einem ungerichteten Graphen ist eine Menge von k Knoten, die paarweise nicht durch eine Kante verbunden sind. Eine Knotenüberdeckung (auch *vertex cover*) der Größe k in einem ungerichteten Graphen ist eine Menge von k Knoten, sodass jede Kante mindestens einen Endpunkt in dieser Menge hat.

(a) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Satz φ_4 an, sodass für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_4 \iff \mathcal{A}$ enthält eine stabile Menge der Größe 4.

(b) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\{E\}]$-Satz ψ_4 an, sodass für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt: $\mathcal{A} \models \psi_4 \iff \mathcal{A}$ enthält eine Knotenüberdeckung der Größe 4.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei $\sigma := \{E, g, c\}$ die Signatur mit dem ein 2-stelligen Relationssymbol E, dem 1-stelligen Funktionssymbol g und dem Konstantensymbol c.

Geben Sie für die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x) \;:=\; \forall y\, \exists z \Big(x{=}y \;\vee\; \big(E(y,x) \;\rightarrow\; E(x,z) \big) \Big)$$

eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, deren Universum aus höchstens 4 Elementen besteht, und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt. (Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt!)

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei $\Sigma := \{\mathtt{A}, \mathtt{N}, \mathtt{S}\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_{\mathtt{A}}, P_{\mathtt{N}}, P_{\mathtt{S}}\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über dem Alphabet Σ.

(a) **Definition:** Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \;:=\; \forall x \Big(P_{\mathtt{S}}(x) \;\rightarrow\; \exists y \big(P_{\mathtt{A}}(y) \;\wedge\; y \leqslant x \;\wedge\; \forall z (z \leqslant y \;\vee\; x \leqslant z) \big) \Big)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangangssprachlich angeben.

(b) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(\mathtt{N}\,\mathtt{S}\,\mathtt{A}^*)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung.

(a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine $\mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{KINO}}]$-Formel φ und ein Variablentupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ an, die die Anfrage beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{D}}$.

- **(i)** Geben Sie alle Kombinationen aus Name eines Kinos und Uhrzeit aus, die einer Vorstellung des Films Gravity entsprechen.
- **(ii)** Geben Sie alle Paare von Namen von Kinos aus, die sich im gleichen Stadtteil befinden.
- **(iii)** Geben Sie die Namen aller Kinos aus, in denen mindestens ein Film gezeigt wird, in dem exakt zwei verschiedene Regisseure Regie geführt haben.

(b) Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formeln φ_1, φ_2 und φ_3 beschrieben werden.

- **(i)** $\varphi_1 \ := \ \exists x_F \ R_{Prog}(\text{'Moviemento'}, x_F, x)$
- **(ii)** $\varphi_2 \ := \ \exists x_{S_1} \exists x_T \ \Big(R_{Kino}(x_1, x_2, x_{S_1}, x_T) \ \wedge \ \exists x_R \exists x_{S_2} \ R_{Film}(x_1, x_R, x_{S_2}) \Big)$
- **(iii)** $\varphi_3 \ := \ \Big(\exists x_K \ R_{Prog}(x_K, x_2, x_3) \ \wedge$
  $\exists x_{S_1} \Big(R_{Film}(x_2, x_1, x_{S_1}) \ \wedge \ \forall x_F \forall x_{S_2} \ (R_{Film}(x_F, x_1, x_{S_2}) \ \rightarrow \ x_F = x_2) \Big) \Big)$