Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

12. Juni 2023

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2023

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 19. Juni 2023, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Sei $\sigma := \{f, c\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c besteht und sei $\sigma' := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Geben Sie an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln, σ-Terme, oder keines von beidem handelt.

(i) $\omega_1 := f(c, f(v_3, v_4))$

(ii) $\omega_2 := f^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}}, v_7)$

(iii) $\omega_3 := f(v_1, f(c, v_3)) = f(v_1, v_2)$

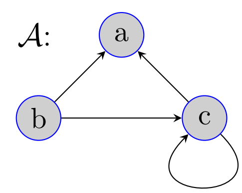
(iv) $\omega_4 := \exists v_1(v_1 = v_1)$

(v) $\omega_5 := (v_1 \wedge v_2)$

(vi) $\omega_6 := \exists v_2 \forall v_2 (f(c, c) = v_3 \rightarrow \forall v_2\ v_5 = v_6)$

(b) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma']$-Satz φ an, der die σ'-Struktur $\mathcal{A}$, die durch den (gerichteten) Graphen in der Abbildung rechts repräsentiert wird, bis auf Isomorphie genau beschreibt. Das heißt es soll für alle σ'-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:

$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$



Aufgabe 2: (40 Punkte)

Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28). Sie dürfen dafür das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) benutzen. *Zur Erinnerung*:

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)**.** *Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien.*

Sei $\varphi \in \mathsf{FO}$ eine Formel der Logik erster Stufe mit $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} = \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$, *und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, *für alle* $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$.

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{E, g\}$ eine Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Geben Sie für jeden der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze je eine σ-Struktur an, die den Satz erfüllt und eine, die den Satz nicht erfüllt. Die Universen der Strukturen, die Sie angeben, sollen jeweils maximal 3 Elemente besitzen.

(i) $\Big(\forall x\ \neg g(x){=}x\ \wedge\ \forall x \forall y \Big(E(x,y)\ \leftrightarrow\ g(x){=}y\Big)\Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\Big(\neg g(y){=}g(x)\ \leftrightarrow\ E(x,y)\Big)\ \vee\ \Big(E(x,y)\ \leftrightarrow\ \neg E(y,x)\Big)\Big)$

(b) Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$. Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(ii) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen p, so dass $2p + 1$ auch prim ist.